第 36 卷 第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2011 年 2 月
Vol. 36　No. 1　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb.　2011

文章编号:1000-5471(2011)01-0058-04

广义导算子的奇异值不等式的推广①

连铁艳，　杨　勇

陕西科技大学 理学院，西安 710021

摘要： 利用增生算子的性质及奇异值最大最小值原理研究了广义导算子的奇异值. 给出一些奇异值不等式，推广了最近一些关于导算子的结果.

关　键　词： 广义导算子；增生算子；正算子；奇异值

中图分类号：O177.1　　　**文献标志码：A**

设 H 为可分的希尔伯特空间，$(\cdot,\cdot)$，为 H 上的内积，H 上的范数 $\|\cdot\|=(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. $B(H)$ 表示 H 上的有界线性算子全体组成的 Banach 代数，$K(H)$ 为 $B(H)$ 上的紧算子全体. 设 $A\in K(H)$，$S_j(A)(j=1,2,\cdots)$ 为 A 的奇异值，即正算子$(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ 的特征值，这里 $S_1(A)\geqslant S_2(A)\geqslant\cdots$(重根按重数计算). 设 $A\in B(H)$，通常的算子范数记为 $\|X\|_\infty$. 若 $A\in K(H)$，则 $\|X\|_\infty=S_1(A)$.

设 $A,B,X,Y\in B(H)$，形如 $AX-XA$ 的算子称为导算子. 形如 $AX-YB$ 的算子称为广义导算子. 文献[1] 证明了广义导算子的奇异值不等式：设 $A,B,X,Y\in B(H)$，而且 X,Y 为紧算子，则

$$S_j(AX-YB)\leqslant 2\max(\|A\|_\infty,\ \|B\|_\infty)S_j(X\oplus Y)\qquad j=1,2,\cdots \tag{1}$$

而且式(1) 推广了文献[2-4] 中的结果. 文献[5] 又得到

$$S_j(AX-YB)\leqslant(\|A\|_\infty+\|B_\infty\|)S_j(X\oplus Y)\qquad j=1,2,\cdots \tag{2}$$

显然式(2) 是式(1) 的推广. 文献[5] 还证明了以下不等式：

$$S_j(AX-YB)\leqslant\frac{\|A\|_\infty+\|B\|_\infty}{2}S_j(X\oplus Y)+\frac{1}{2}\|\,\|A\|_\infty X-\|B\|_\infty Y\,\|\qquad j=1,2,\cdots \tag{3}$$

当 A,B 是半正定矩阵时，有

$$S_j(AX-YB)\leqslant\frac{\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty+\|X-Y\|_\infty}{2}S_j(A\oplus B)\qquad j=1,2,\cdots \tag{4}$$

本文对式(1)、式(2) 进行了推广. 利用我们的主要定理，同样可以得到式(3) 和式(4).

定义 1[6]　设 $C\in B(H)$. 如果对于任意 $x\in H$，有 $\mathrm{Re}(Cx,x)\geqslant 0$，则称 C 是 H 上的增生算子.

引理 1　设 $A,B\in K(H)$，则

$$S_j(A+B)\leqslant S_j(A)+\|B\|_\infty\qquad j=1,2,\cdots$$

证　由 $\|(A+B)x\|\leqslant\|Ax\|+\|B\|_\infty\|x\|$，利用奇异值最大最小值原理直接可得结果.

引理 2　设 $A,\alpha,\beta\in B(H)$，定义 $C_{\alpha,\beta}(A)=(A^*-\alpha^*)(\beta-A)$，则下面两条等价：

(i) 算子 $C_{\alpha,\beta}(A)$ 是增生算子；

---

① 收稿日期：2010-02-27

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10571113)；陕西科技大学自选科研项目(ZX07-31).

作者简介：连铁艳(1979-)，女，陕西澄城人，讲师，主要从事算子理论与小波分析的研究.

(ii) $\|(A-\frac{\alpha+\beta}{2})x\| \leqslant \|\frac{\beta-\alpha}{2}x\|$，$\forall x\in H$.

证　利用等式

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(C_{\alpha,\beta}(A)x,x)=&\mathrm{Re}((A^*-\alpha^*)(\beta-A)x,x)=\\&\mathrm{Re}((\beta-A)x,(A-\alpha)x)=\\&\frac{1}{4}\{\|(\beta-A)x+(A-\alpha)x\|^2-\|(\beta-A)x-(A-\alpha)x\|^2\}=\\&\frac{1}{4}\{\|(\beta-\alpha)x\|^2-\|(\beta+\alpha-2A)x\|^2\}=\\&\|\frac{\beta-\alpha}{2}x\|^2-\|\left(\frac{\beta+\alpha}{2}-A\right)x\|^2\end{aligned}$$

和增生算子的定义，即可证明出等价关系成立.

下面，我们记

$$k_{\alpha,\beta}(A)=\inf_{\|x\|=1}\mathrm{Re}((A^*-\alpha^*)(\beta-A)x,x)$$

则有 $k_{\alpha,\beta}(A)\geqslant 0$ 当且仅当 $C_{\alpha,\beta}(A)$ 是增生算子；$k_{\alpha,\beta}(A)\geqslant k$ 当且仅当 $C_{\alpha,\beta}(A)$ 是 k-增生算子.

定理 1　设 $A,B,X,Y,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in B(H)$，而且 X，Y 是紧算子，$\alpha_2+\beta_2$ 与 Y 可交换，$C_{\alpha_1,\beta_1}(A)$ 和 $C_{\alpha_2,\beta_2}(B)$ 是增生算子，则对任意 $j=1,2,\cdots$，有

$$\begin{aligned}S_j(AX-YB)\leqslant&\left\{\left[\|\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}\|_\infty^2-k_{\alpha_1,\beta_1}(A)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\|\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\|_\infty^2-k_{\alpha_2,\beta_2}(B)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}S_j(X\oplus Y)+\\&\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\|_\infty\leqslant\\&\left(\|\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}\|_\infty+\|\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\|_\infty\right)S_j(X\oplus Y)+\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\|_\infty\end{aligned}$$

证　因为

$$AX-YB=\left(A-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right)X-Y\left(B-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right)+\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y$$

所以，由引理 1 与式(2)，有

$$\begin{aligned}S_j(AX-YB)\leqslant&S_j\left(\left(A-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\right)X-Y\left(B-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}\right)\right)+\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\|_\infty\leqslant\\&\left(\|A-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\|_\infty+\|B-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}\|_\infty\right)S_j(X\oplus Y)+\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\|_\infty\end{aligned}$$

又因为 $C_{\alpha_1,\beta_1}(A)$ 和 $C_{\alpha_2,\beta_2}(B)$ 是增生算子，所以有

$$k_{\alpha_1,\beta_1}(A)\leqslant\|\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}\|_\infty^2-\|A-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}\|_\infty^2$$

$$k_{\alpha_2,\beta_2}(B)\leqslant\|\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\|_\infty^2-\|B-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}\|_\infty^2$$

因此

$$\begin{aligned}S_j(AX-YB)\leqslant&\left\{\left[\|\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}\|_\infty^2-k_{\alpha_1,\beta_1}(A)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\|\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\|_\infty^2-k_{\alpha_2,\beta_2}(B)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}S_j(X\oplus Y)+\\&\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\|_\infty\leqslant\\&\left(\|\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}\|_\infty+\|\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\|_\infty\right)S_j(X\oplus Y)+\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\|_\infty\end{aligned}$$

推论 1　设 $A,B,X,Y,T\in B(H)$，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{C}$，而且 X,Y 是紧算子，T 与 X,Y 可交换，$C_{\alpha_1T,\beta_1T}(A)$ 和 $C_{\alpha_2T,\beta_2T}(B)$ 都是增生算子，则对任意 $j=1,2,\cdots$，有

$$S_j(AX-YB)\leqslant\left(\frac{|\beta_1-\alpha_1|}{2}+\frac{|\beta_2-\alpha_2|}{2}\|T\|_\infty\right)S_j(X\oplus Y)+$$
$$\left\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\right\|_\infty\|T\|_\infty$$

推论 2　设 $X,Y\in K(H)$，$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$，$A,B$ 为自伴算子，且

$$\alpha_1 I\leqslant A\leqslant\beta_1 I$$
$$\alpha_2 I\leqslant B\leqslant\beta_2 I$$

则

$$S_j(AX-YB)\leqslant\left(\frac{(\beta_1-\alpha_1)}{2}+\frac{(\beta_2-\alpha_2)}{2}\right)S_j(X\oplus Y)+\left\|\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}X-\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}Y\right\|_\infty$$

特别地

$$S_j(AX-XA)\leqslant(\beta_1-\alpha_1)S_j(X\oplus X)$$

证　因为 $\alpha_1 I\leqslant A\leqslant\beta_1 I$，则 $-\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}I\leqslant A-\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}I\leqslant\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}I$，所以由引理2，$C_{\alpha_1 I,\beta_1 I}(A)$ 为增生算子．同理 $C_{\alpha_2 I,\beta_2 I}(B)$ 也为增生算子．因此由定理1知结论成立．

推论2的特殊情况为文献[5]中定理2.3中的(2.9)式．

推论 3　设 $A,X,\alpha,\beta\in B(H)$，且 X 是紧算子，$\alpha+\beta$ 与 X 可交换，$C_{\alpha,\beta}(A)$ 是增生算子，则

$$S_j(AX-XA)\leqslant\left[\left\|\frac{\beta-\alpha}{2}\right\|_\infty^2-k_{\alpha,\beta}(A)\right]^{\frac{1}{2}}S_j(X\oplus X)\leqslant$$
$$\|\beta-\alpha\|_\infty S_j(X\oplus X)$$

推论3为文献[6]中定理3.1中的结果．

下面我们考虑特殊的增生算子即半正定算子，而且我们是限制在 $M_n(\mathbb{C})$ 上或者说是限制在有限维的希尔伯特空间上．

定理 2　设 $A,B,X,Y,\lambda\in M_n(\mathbb{C})$．若 λ 与 A 可交换，则

$$S_j(AX-YB)\leqslant(\|A\|_\infty+\|B\|_\infty)S_j((X-\lambda)\oplus(Y-\lambda))+\|\lambda A-\lambda B\|_\infty$$

又若 λ 与 Y 可交换，则

$$S_j(AX-YB)\leqslant(\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty)S_j((A-\lambda)\oplus(B-\lambda))+\|\lambda X-\lambda Y\|_\infty$$

证　因为

$$AX-YB=A(X-\lambda)-(Y-\lambda)B+\lambda A-\lambda B$$

所以，由引理1与式(2)，有

$$S_j(AX-YB)\leqslant S_j(A(X-\lambda)-(Y-\lambda)B)+\|\lambda A-\lambda B\|_\infty\leqslant$$
$$(\|A\|_\infty+\|B\|_\infty)S_j((X-\lambda)\oplus(Y-\lambda))+\|\lambda A-\lambda B\|_\infty$$

又由于

$$S_j(AX-YB)=S_j(YB-AX)$$

因此

$$S_j(AX-YB)\leqslant(\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty)S_j((A-\lambda)\oplus(B-\lambda))+\|\lambda X-\lambda Y\|_\infty$$

若又有 A,B,X,Y 为半正定矩阵，分别令

$$\lambda=\frac{S_j(X\oplus Y)}{2}$$
$$\lambda=\frac{S_j(A\oplus B)}{2}$$

则有

$$S_j((X-\lambda)\oplus(Y-\lambda))=\frac{S_j(X\oplus Y)}{2}$$

$$S_j((A-\lambda)\oplus(B-\lambda))=\frac{S_j(A\oplus B)}{2}$$

利用定理 2，我们可得到比式(1)、式(2)更好的结果

$$S_j(AX-YB)\leqslant\frac{\|A\|_\infty+\|B\|_\infty+\|A-B\|_\infty}{2}S_j(X\oplus Y)$$

$$S_j(AX-YB)\leqslant\frac{\|X\|_\infty+\|Y\|_\infty+\|X-Y\|_\infty}{2}S_j(A\oplus B)$$

参考文献：

[1] KITTANEH F. Singular Value Inequalities for Commutators of Hilbert Space Operators [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 430(2): 2362－2367.

[2] BHATIA R, KITTANEH F. Commutators, Pinchings and Spectral Variation [J]. Oper Matrices, 2008, 2(5): 143－151.

[3] KITTANEH F. Norm Inequalities for Commutators of Self-Adjoint Operators [J]. Integral Equations Operator Theory, 2008, 62(2): 129－153.

[4] WANG Y Q, DU H K. Norms for Commutators of Self-Adjoint Operators [J]. J Math Ana Appl, 2008, 342(6): 747－751.

[5] HIRZALAH O. Commutator Inequalities for Hilbert Space Operators [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431(2): 1571－1578.

[6] NIEZGODA M. Commutator and Accretive Operator [J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431(2): 1192－1198.

[7] BHATIA R. Matrix Analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[8] 连铁艳，成立花. 亚正规算子的性质 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(8)：153－156.

[9] 连铁艳，杨　勇，成立花. Lyapunov 定理的推广 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(10)：113－115.

[10] 姚喜妍. Hilbert 空间 H 上正交射影对的性质 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2004，29(6)：900－902.

The Generalization of Inequalities of Singular Value for the Generalized Commutator

LIAN Tie-yan,　YANG　Yong

Faculty of Science, Shaanxi University of Science & Technology, Xi'an 710021, China

Abstract: Using the propertief of accretive operator and the max-min principle of singular value, the singular values of the generalized commutators are studied and some inequalities of singular value are given, which generalize recent results for commutators due to F. Kittaneh, R. Bhatia and O. Hirzalah.

Key words: generalized commutator; accretive operator; positive operator; singular value

责任编辑　覃吉康