文章编号:1000-5471(2011)01-0048-04

模糊数值直觉模糊群的性质及一个重要结论[①]

范传强

辽宁石油化工大学 理学院,辽宁 抚顺 113001

摘要: 定义了模糊数值直觉模糊群,讨论它的一些运算,研究它的一些性质并加以证明. 最后在两个非空有限经典群同态意义下,证明了这种模糊数值直觉模糊群的像仍是模糊数值直觉模糊群.

关 键 词: 模糊数值直觉模糊集;模糊数值直觉模糊群;隶属函数;扩展运算

中图分类号: O159 **文献标志码:** A

自文献[1-2]定义三角模糊数并给出其序关系以来,学者们围绕三角模糊数这一热门话题展开了丰富的研究[3-8]. 其中,文献[3]通过三角模糊数定义模糊数值直觉模糊集,给出模糊数值直觉模糊集的扩展原理、运算性质. 本文在此基础之上定义模糊数值直觉模糊群,随后研究模糊数值直觉模糊群的性质,得出一个重要结论.

1 模糊数值直觉模糊群及其性质

定义 设 G 是非空有限经典群,G 上的一个模糊数值直觉模糊集

$$A=\{\langle x, \underset{\sim}{M}_A(x), \underset{\sim}{N}_A(x)\rangle \mid x \in G\}$$

如果满足:

(i) $\underset{\sim}{M}_A(xy) \supseteq \underset{\sim}{M}_A(x) \cap \underset{\sim}{M}_A(y)$, $\underset{\sim}{N}_A(xy) \subseteq \underset{\sim}{N}_A(x) \cup \underset{\sim}{N}_A(y)$, $\forall x, y \in G$;

(ii) $\underset{\sim}{M}_A(x^{-1}) \supseteq \underset{\sim}{M}_A(x)$, $\underset{\sim}{N}_A(x^{-1}) \subseteq \underset{\sim}{N}_A(x)$, $\forall x \in G$,

则称 A 为 G 上的一个模糊数值直觉模糊群.

为了方便,令 $T[G]$ 表示群 G 上所有模糊数值直觉模糊群构成的集合.

定理 1 设 G 是非空有限经典群. 若 $A, B \in T[G]$,则 $A \cap B \in T[G]$.

证 设

$$A=\{\langle x, \underset{\sim}{M}_A(x), \underset{\sim}{N}_A(x)\rangle \mid x \in G\}$$
$$B=\{\langle x, \underset{\sim}{M}_B(x), \underset{\sim}{N}_B(x)\rangle \mid x \in G\}$$

按模糊数值直觉模糊集交的定义,有

$$A \cap B=\{\langle x, \underset{\sim}{M}_A(x) \cap \underset{\sim}{M}_B(x), \mu_B(x), \underset{\sim}{N}_A(x) \cup \underset{\sim}{N}_B(x)\rangle \mid x \in G\}$$

对 $\forall x, y \in G$,令

$$\underset{\sim}{M}_{A\cap B}(x)=\underset{\sim}{M}_A(x) \cap \underset{\sim}{M}_B(x)$$
$$\underset{\sim}{N}_{A\cap B}(x)=\underset{\sim}{N}_A(x) \cup \underset{\sim}{N}_B(x)$$

一方面

① 收稿日期:2010-03-05
作者简介:范传强(1976-),男,辽宁大连人,硕士,讲师,主要从事数值逼近的研究.

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{M}_{A\cap B}(x\,y) = & (\underset{\sim}{M}_A(xy) \cap \underset{\sim}{M}_B(xy)) \supseteq \\
& (\underset{\sim}{M}_A(x) \cap \underset{\sim}{M}_A(y)) \cap (\underset{\sim}{M}_B(x) \cap \underset{\sim}{M}_B(y)) = \\
& (\underset{\sim}{M}_A(x) \cap \underset{\sim}{M}_B(x)) \cap (\underset{\sim}{M}_A(y) \cap \underset{\sim}{M}_B(y)) = \\
& \underset{\sim}{M}_{A\cap B}(x) \cap \underset{\sim}{M}_{A\cap B}(y)
\end{aligned}
$$

类似地可得$\underset{\sim}{N}_{A\cap B}(x\,y) \subseteq (\underset{\sim}{N}_{A\cap B}(x) \cup \underset{\sim}{N}_{A\cap B}(y))$.

另一方面，有

$$
\underset{\sim}{M}_{A\cap B}(x^{-1}) = (\underset{\sim}{M}_A(x^{-1}) \cap \underset{\sim}{M}_B(x^{-1})) \supseteq (\underset{\sim}{M}_A(x) \cap \underset{\sim}{M}_B(x)) = \underset{\sim}{M}_{A\cap B}(x)
$$

类似地可证$\underset{\sim}{N}_{A\cap B}(x^{-1}) \subseteq \underset{\sim}{N}_{A\cap B}(x)$，因此 $A \cap B \in T[G]$.

推论　设$\{A_j \mid j \in J\} \subset T[G]$，则$\bigcap_{j\in J} A_j \in T[G]$，$J$ 为指标集.

定理 2　设 G 是非空有限经典群. 若 $A \in T[G]$，则 $\Box A \in T[G]$.

证　设 $A = \{\langle x, \underset{\sim}{M}_A(x), \underset{\sim}{N}_A(x)\rangle \mid x \in G\}$，则

$$
\Box A = \{\langle x, \underset{\sim}{M}_A(x), (N_A^1(x), (1 - M_A^3(x)), (1 - M_A^3(x)))\rangle \mid x \in G\}
$$

显然$\underset{\sim}{M}_A(x\,y) \supseteq (\underset{\sim}{M}_A(x) \cap \underset{\sim}{M}_A(y))$. 又因为

$$
N_A^1(xy) \leqslant N_A^1(x) \vee N_A^1(y)
$$

$$
M_A^3(xy) \geqslant M_A^3(x) \wedge M_A^3(y)
$$

$$
1 - M_A^3(xy) \leqslant 1 - M_A^3(x) \wedge M_A^3(y) = (1 - M_A^3(x)) \vee (1 - M_A^3(y))
$$

所以

$$
\begin{aligned}
& (N_A^1(xy), (1 - M_A^3(xy)), (1 - M_A^3(xy))) \subseteq \\
& (N_A^1(x), (1 - M_A^3(x)), (1 - M_A^3(x))) \cup \\
& (N_A^1(y), (1 - M_A^3(y)), (1 - M_A^3(y)))
\end{aligned}
$$

故满足定义中的(i).

由已知可知

$$
\underset{\sim}{M}_A(x^{-1}) \supseteq \underset{\sim}{M}_A(x) \qquad N_A^1(x^{-1}) \leqslant N_A^1(x) \qquad M_A^3(x^{-1}) \geqslant M_A^3(x)
$$

于是

$$
(N_A^1(x^{-1}), 1 - M_A^3(x^{-1}), 1 - M_A^3(x^{-1})) \subseteq (N_A^1(x), 1 - M_A^3(x), 1 - M_A^3(x))
$$

所以 $\Box A \in T[G]$.

定理 3　设 G 是非空有限经典群. 若 $A \in T[G]$，则 $\Diamond A \in T[G]$.

证　设 $A = \{\langle x, \underset{\sim}{M}_A(x), \underset{\sim}{N}_A(x)\rangle \mid x \in G\}$，则

$$
\Diamond A = \{\langle x, (M_A^1(x), (1 - N_A^3(x)), (1 - N_A^3(x))), \underset{\sim}{N}_A(x)\rangle \mid x \in G\}
$$

显然$\underset{\sim}{N}_A(x\,y) \subseteq (\underset{\sim}{N}_A(x) \cup \underset{\sim}{N}_A(y))$，$\underset{\sim}{N}_A(x^{-1}) \subseteq \underset{\sim}{N}_A(x)$. 又因为

$$
M_A^1(xy) \geqslant M_A^1(x) \wedge M_A^1(y)
$$

$$
N_A^3(xy) \leqslant N_A^3(x) \vee N_A^3(y)
$$

所以

$$
1 - N_A^3(xy) \geqslant 1 - N_A^3(x) \vee N_A^3(y) \geqslant (1 - N_A^3(x)) \wedge (1 - N_A^3(y))
$$

$$
\begin{aligned}
& (M_A^1(xy), (1 - N_A^3(xy)), (1 - N_A^3(xy))) \supseteq \\
& (M_A^1(x), (1 - N_A^3(x)), (1 - N_A^3(x))) \cap \\
& (M_A^1(y), (1 - N_A^3(y)), (1 - N_A^3(y)))
\end{aligned}
$$

故满足定义中的(i).

由已知可知

$$
M_A^1(x^{-1}) \geqslant M_A^1(x)
$$

$$
N_A^3(x^{-1}) \leqslant N_A^3(x)
$$

从而

$$(M_A^1(x^{-1}),\ 1-N_A^3(x^{-1}),\ 1-N_A^3(x^{-1}))\supseteq(M_A^1(x),\ 1-N_A^3(x),\ 1-N_A^3(x))$$

所以 $\Diamond A\in T[G]$.

注 不能推出 $\overline{A}\in T[G]$ 和 $A\cup B\in T[G]$.

2 一个重要结论

定理 4 设 G_1,G_2 均为非空有限经典群，$f\colon G_1\longrightarrow G_2$ 是同态映射. 若 $A\in T[G_1]$，则 $F_f(A)\in T[G_2]$.

证 设 $A=\{\langle x,\ \underset{\sim}{M}_A(x),\ \underset{\sim}{N}_A(x)\rangle\mid x\in G_1\}$，由扩展原理可得

$$F_f(A)=\{\langle y,\ F_f(\underset{\sim}{M}_A)(y),\ \hat{F}_f(\underset{\sim}{N}_A)(y)\rangle\mid y\in G_2\}$$

1）首先证明：$\forall y\in G_2$，$f^{-1}(y)=\varnothing$ 当且仅当 $f^{-1}(y^{-1})=\varnothing$.

事实上，$f^{-1}(y^{-1})\neq\varnothing$ 当且仅当存在 $x_0\in f^{-1}(y^{-1})$，使 $f(x_0)=y^{-1}$. 又因为 f 是 G_1 到 G_2 上的群同态映射，所以 $f(x_0)=y^{-1}$ 当且仅当 $(f(x_0))^{-1}=y$；$(f(x_0))^{-1}=y$ 当且仅当 $x_0^{-1}\in f^{-1}(y)$ 且 $x_0^{-1}\in G_1$，而 $x_0^{-1}\in f^{-1}(y)$ 且 $x_0^{-1}\in G$ 当且仅当 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$. 此时，由扩展原理知

$$\left.\begin{aligned}F_f(\underset{\sim}{M}_A)(y^{-1})&=F_f(\underset{\sim}{M}_A)(y)=\underset{\sim}{0}\\ \hat{F}_f(\underset{\sim}{N}_A)(y^{-1})&=\hat{F}_f(\underset{\sim}{N}_A)(y)=\underset{\sim}{1}\end{aligned}\right\}\quad\forall y\in G_2$$

即定义 (ⅱ) 中的等号成立. 其次，当 $f^{-1}(y)\neq\varnothing$ 时，$\forall y\in G_2$，由扩展原理有

$$\begin{aligned}F_f(\underset{\sim}{M}_A)(y^{-1})&=\bigcup_{x\in\{t/f(t)=y^{-1},\ x\in G_1\}}\underset{\sim}{M}_A(x)=\\&\bigcup_{x\in\{t/f(t^{-1})=y,\ x\in G_1\}}\underset{\sim}{M}_A((x^{-1})^{-1})=\\&\bigcup_{z\in\{t/f(t)=y,\ t^{-1}\in G_1\}}\underset{\sim}{M}_A(z^{-1})\supseteq\\&(\bigcup_{z\in\{t/f(t)=y,\ t\in G_1\}}\underset{\sim}{M}_A(z)=\\&F_f(\underset{\sim}{M}_A)(y)\end{aligned}$$

同理可证 $\hat{F}_f(\underset{\sim}{N}_A)(y^{-1})\subseteq\hat{F}_f(\underset{\sim}{N}_A)(y)$.

2）另一方面，由上述证明，不失一般性，可设 $f\colon G_1\longrightarrow G_2$ 是满射. 若存在 y_1,$y_2\in G_2$，且至少使

$$\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}M_A^1(t)<\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1,\ x\in E_1\}}M_A^1(t)\wedge\sup_{t\in\{x/f(x)=y_2,\ x\in E_1\}}M_A^1(t)\tag{1}$$

$$\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}M_A^2(t)<\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1,\ x\in E_1\}}M_A^2(t)\wedge\sup_{t\in\{x/f(x)=y_2,\ x\in E_1\}}M_A^2(t)\tag{2}$$

$$\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}M_A^3(t)<\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1,\ x\in E_1\}}M_A^3(t)\wedge\sup_{t\in\{x/f(x)=y_2,\ x\in E_1\}}M_A^3(t)\tag{3}$$

$$\inf_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}N_A^1(t)>\inf_{t\in\{x/f(x)=y_1,\ x\in E_1\}}N_A^1(t)\vee\inf_{t\in\{x/f(x)=y_2,\ x\in E_1\}}N_A^1(t)\tag{4}$$

$$\inf_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}N_A^2(t)>\inf_{t\in\{x/f(x)=y_1,\ x\in E_1\}}N_A^2(t)\vee\inf_{t\in\{x/f(x)=y_2,\ x\in E_1\}}N_A^2(t)\tag{5}$$

$$\inf_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}N_A^3(t)>\inf_{t\in\{x/f(x)=y_1,\ x\in E_1\}}N_A^3(t)\vee\inf_{t\in\{x/f(x)=y_2,\ x\in E_1\}}N_A^3(t)\tag{6}$$

之一成立.

不妨设(1) 式成立. 这时，由上确界的定义知，必存在相应的 x_1,$x_2\in G_1$，使

$$f(x_1)=y_1\qquad f(x_2)=y_2$$

且

$$\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}M_A^1(t)<M_A^1(x_1)\wedge M_A^1(x_2)$$

又因 $f(x_1x_2)=y_1y_2$(f 为满同态)，所以

$$\sup_{t\in\{x/f(x)=y_1y_2,\ x\in E_1\}}M_A^1(t)\geqslant M_A^1(x_1x_2)$$

故

$$M_A^1(x_1x_2) < M_A^1(x_1) \wedge M_A^1(x_2)$$

与 $A \in T[G_1]$ 矛盾，所以(1)不成立．同理(2)，(3)也不能成立．类似地，(4)若成立也与已知 $A \in T[G_1]$ 相矛盾．同理(5)，(6)也不能成立．因此 $\forall y_1, y_2 \in G_2$，(1)，(2)，(3)与(4)，(5)，(6)式各自的反向不等式必须同时成立，由定义便有 $F_f(A) \in T[G_2]$.

参考文献：

[1] ATANASSOV K. Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，1986，20(1)：87－96.

[2] ATANASSOV K. Interval Valued Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems，1989，31(3)：343－349.

[3] 刘　锋，袁学海．模糊数值直觉模糊集 [J]．模糊系统与数学，2007，20(1)：88－91.

[4] 彭祖赠，孙韫玉．模糊(Fuzzy)数学及其应用 [M]．武汉：武汉大学出版社，2004：25－40.

[5] 张　萍，闵　兰，周亚非．下半连续的模糊集及其凸性 [J]．西南师范大学学报：自然科学版，2006，31(2)：38－41.

[6] 李选海，班喜光，范传强．一种新的直觉模糊群的同态 [J]．辽宁师范大学学报：自然科学版，2005，28(3)：285－286.

[7] 何再超，郑钦玉，卢　坤，等．重庆市大气环境质量的模糊数学综合评价 [J]．西南大学学报：自然科学版，2005，27(3)：397－400.

[8] 李红刚．一类新的带(H，η)-单调映象的广义非线性模糊集值变分包含 [J]．西南师范大学学报：自然科学版，2007，32(5)：1－5.

The Quality of Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Group and One of Its Important Conclusion

FAN Chuan-qiang

School of Science，Liaoning Shihua University，Fushun Liaoning 113001，China

Abstract：This article defines the fuzzy number intuitionistic fuzzy group and discusses some of its operations，then studies its some properties and gives the proofs. Finally，in the sense of homomorphism between two nonoempty limited classical groups，it proves that the image of this kind of fuzzy number intuitionistic fuzzy groups is also a fuzzy number intuitionistic fuzzy group.

Key words：fuzzy number intuitionistic set；fuzzy number intuitionistic group；membership-function；the extension operations

责任编辑　覃吉康