第 36 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 2 月
Vol. 36 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2011

文章编号:1000-5471(2011)01-0031-03

自由©-半模[①]

张廷海, 黄福生, 甘爱萍

江西师范大学 数学与信息科学学院,南昌 330027

摘要:为了更好地开展对半模的研究,具体给出了一种在幺半环上构造自由©-半模的方法.

关 键 词:半模;©-半模;自由©-半模

中图分类号:O153.3 **文献标志码**:A

在半模的范畴理论中,自由半模起着十分重要的奠基作用.尽管在半模组成的代数簇中,自由半模的存在性是毋庸置疑的,然而,给出其具体的构造方法仍是必要和十分重要的.下面给出一种关于自由半模和自由©-半模的构造方法.

本文中没有特别说明的符号、概念均请参见文献[1-3].

定理 1 设 X 为非空集,R 为幺半环,则存在以 X 为基的自由左 R-半模与自由左 R-©-半模.

证 (Ⅰ) 作 R 与 X 的卡氏积

$(R\times X)^1 = R\times X$

$(R\times X)^2 = \{((r_1, x_1), (r_2, x_2)) \mid r_i\in \mathbf{R}, x_i\in X, x_1, x_2 \text{ 两两不等}\} \subseteq (R\times X)\times(R\times X)$

$(R\times X)^3 = \{((r_1, x_1), (r_2, x_2), (r_3, x_3)) \mid r_i\in \mathbf{R}, x_i\in X, i=1,2,3, x_1, x_2, x_3 \text{ 两两不等}\} \subseteq (R\times X)\times(R\times X)\times(R\times X)$

$\vdots$

一般地,对任意正整数 n,令

$$(R\times X)^n = \{((r_1, x_1), (r_2, x_2), \cdots, (r_n, x_n)) \mid r_i\in \mathbf{R}, x_i\in X, i=1,2,\cdots,n, x_1, x_2, \cdots, x_n \text{ 两两不等}\} \subseteq \underbrace{(R\times X)\times(R\times X)\times\cdots\times(R\times X)}_{n}$$

(Ⅱ) 记 $M=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(R\times X)^i$(易知这是无交并),$M$ 中元素记为 Y,i 称为 $(R\times X)^i$ 的次数,也称为 $Y\in(R\times X)^i$ 的次数.当 $Y\in(R\times X)^i$ 时,(r_k, x_k) 称为 Y 的第 k 个分量 $(k=1,2,\cdots,i)$.易知,Y 的次数是唯一的.

(Ⅲ) 在 M 上定义二元关系"$\sim$":$Y\sim Y'$ 当且仅当 $l_Y = l_{Y'}$.其中

$$l_Y = \{(r_u, x_u) \mid (r_u, x_u) \text{ 为 } Y \text{ 的一个分量}\}$$

易知,若 $Y\sim Y'$,则 Y 与 Y' 有相同的次数,并且"$\sim$"为 M 上的等价关系.

---

① 收稿日期:2010-01-15

基金项目:江西省自然科学基金资助项目(0611051).

作者简介:张廷海(1974-),男,江西永修人,讲师,硕士,主要从事半环理论的研究.

(Ⅳ) 作商集$\overline{M}=M/\sim$，并在$\overline{M}$上定义"+"和左R乘法"$\circ$"如下：

设$Y\in(R\times X)^i$，$Y'\in(R\times X)^j$. 又不妨设

$$Y=((r_1,x_1),\cdots,(r_i,x_i)) \qquad x_1,\cdots,x_i \text{ 两两不等}$$

$$Y'=((r_1',x_1'),\cdots,(r_j',x_j')) \qquad x_1',\cdots,x_j' \text{ 两两不等}$$

(1°) 当$\{x_u \mid u=1,\cdots,i\}\cap\{x_v' \mid v=1,\cdots,j\}=\varnothing$时，定义

$$\overline{Y}+\overline{Y'}=\overline{((r_1,x_1),\cdots(r_i,x_i),(r_1',x_1'),\cdots,(r_j',x_j'))}$$

(2°) 否则，不妨设

$$\{x_u \mid u=1,\cdots,i\}\cap\{x_v' \mid v=1,\cdots,j\}=\{x_1=x_1',\cdots,x_k=x_k'\} \qquad k\leqslant i,j$$

这时定义

$$\overline{Y}+\overline{Y'}=\overline{((r_1+r_1',x_1),\cdots,(r_k+r_k',x_k),(r_{k+1},x_{k+1}),\cdots,(r_i,x_i),(r_{k+1}',x_{k+1}'),\cdots,(r_j',x_j'))}$$

定义

$$r\circ\overline{Y}=r\circ\overline{((r_1,x_1),\cdots,(r_i,x_i))}\overset{\text{def}}{=}\overline{((rr_1,x_1),\cdots,(rr_i,x_i))}$$

容易证明："+"与"$\circ$"是合理的，并且$(\overline{M},+,\circ)$作成左R-半模.

(Ⅴ) $(\overline{M},+,\circ)$是以X为基的自由半模.

事实上，令$X'=\{\overline{(1,x_i)} \mid x_i\in X,i\in I,|I|=|X|\}$，则$\overline{M}$是以$X'$为基的自由半模. 显然$X'\subseteq\overline{M}$. 对任意$\overline{Y}\in\overline{M}$(其中$Y\in M$)，设$\overline{Y}=\overline{((r_1,x_1),\cdots,(r_i,x_i))}$($x_1,\cdots,x_i$两两不等)，则由"+"的定义可得

$$\overline{Y}=\overline{(r_1,x_1)}+\cdots+\overline{(r_i,x_i)}=r_1\circ\overline{(1,x_1)}+\cdots+r_i\circ\overline{(1,x_i)} \tag{1}$$

其中$\overline{(1,x_1)},\cdots,\overline{(1,x_i)}\in X'$.

下证此表法唯一.

若还存在$\overline{(1,y_1)},\cdots,\overline{(1,y_j)}\in X'$，使

$$\overline{Y}=r_1'\circ\overline{(1,y_1)}+\cdots+r_j'\circ\overline{(1,y_j)} \tag{2}$$

则我们可以断言：

(ⅰ) $j=i$.

这是因为，由(1)式可知Y的次数为i；由(2)式可知Y的次数为j. 但Y的次数是唯一的，故$j=i$.

(ⅱ) $\{\overline{(1,x_u)} \mid u=1,\cdots,i\}=\{\overline{(1,y_v)} \mid v=1,\cdots,i\}$，$\{r_u \mid u=1,\cdots,i\}=\{r_v' \mid v=1,\cdots,i\}$.

事实上，分别用$\overline{Y}_{(1)}$，$\overline{Y}_{(2)}$表示(1)式，(2)式的右端，由(1)，(2)式得知$\overline{Y}_{(1)}=\overline{Y}_{(2)}$，从而有

$$\{(r_u,x_u) \mid u=1,\cdots,i\}=\{(r_v',y_v) \mid v=1,\cdots,i\}$$

进而必有

$$\{r_u \mid u=1,\cdots,i\}=\{r_v' \mid v=1,\cdots,i\}$$

$$\{x_u \mid u=1,\cdots,i\}=\{y_v \mid v=1,\cdots,i\}$$

因此X'是$\overline{M}$的左R-基.

令$\alpha:X\longrightarrow X'$，$x\longmapsto\overline{(1,x)}$，$\forall x\in X$，则$\alpha$是$X$到$X'$的单映射.

事实上，对任意$x,y\in X$，若$x\neq y$，则必有$\overline{(1,x)}\neq\overline{(1,y)}$. 不然，若$\overline{(1,x)}=\overline{(1,y)}$，则$(1,x)\sim(1,y)$，从而$(1,x)=(1,y)$，$x=y$，这与假设矛盾!

综上可知，$(\overline{M},+,\circ)$是以X为基的自由左R-半模.

(Ⅵ) 设©是与$\overline{M}$和R无关的符号，令$\overline{\overline{M}}=\overline{M}\cup\{©\}$，在$\overline{\overline{M}}$上规定"$\oplus$"和左$R$乘法"$\circ'$"如下：

$$\overline{Y}\oplus© = ©\oplus\overline{Y}=©$$

$\overline{Y_1}\oplus\overline{Y_2}$为$\overline{M}$中"+"运算，$\forall\ \overline{Y_1},\overline{Y_2}\in\overline{M}$.

$$r \circ' © = ©$$

$r \circ' \overline{Y}$ 为 R 对$\overline{M}$ 的“∘”乘法，$\forall\, r \in \mathbf{R}$，$\overline{Y} \in \overline{M}$.

则($\overline{\overline{M}}$，$\oplus$，$\circ'$) 作成以 $X \cup \{©\}$ 为基的自由左 R -©-半模(©作为零元算子，由自身唯一表出).

参考文献：

[1] GOLAN J S. Semirings and Their Application [M]. New York：Klu Wer Academic Publishers，1999.

[2] FRANK W ANDERSON，KENT R FULLER. Rings and Categories of Modules [M]. New York：Springer-Verlag，1973.

[3] 张廷海. 半模的©-结构 [J]. 江西师范大学学报：自然科学版，2006(3)：260－262.

[4] 陈培慈. 半环理论与语言和自动机 [M]. 南昌：江西高校出版社，1993.

[5] 史东风，陈贵云. 两个有限超可解群的积 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(4)：8－10.

[6] 王家勤，曹洪平. $8p$ 阶群的类方程及其对群结构的影响 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(10)：101－105.

[7] 程莉芳，孔祥智. 正规富足半群 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2008，33(5)：11－14.

Free ©-Semimodule

ZHANG Ting-hai，　HUANG Fu-sheng，　GAN Ai-ping

Institute of Mathematics and Informatics，Jiangxi Normal University，Nanchang 330027，China

Abstract：It is very important to give out the construction of free semimodule，for the better studying of semimodule. That is just like the importance of constructing free module in the studying of ring and module. In this paper，it constructs the free ©-semimodule over a semiring with a unit element.

Key words：semimodule；©-semimodule；free ©-semimodule

责任编辑　覃吉康