文章编号:1000-5471(2011)01-0026-05

李型单群的一种特征标次数图①

梁登峰[1]，　李士恒[2]，　施武杰[3]

1. 北京工商大学 数学系，北京 100048；2. 郑州航空工业管理学院 数理系，郑州 450015；
3. 苏州大学 数学科学学院，江苏 苏州 215006

摘要：考虑李型单群的一种特征标次数图，证明了：若 G 是李型单群，则对任意的 $m \in \mathrm{cd}(G)$，图 $\Delta(G-m)$ 至多有三个连通分支.

关 键 词：李型单群；不可约特征标；特征标次数图

中图分类号：O152.6　　**文献标志码**：A

本文中 G 总表示一个有限群. $\mathrm{cd}(G)$ 是由 G 的所有不可约特征标次数组成的集合. 有关 $\mathrm{cd}(G)$ 和 G 的结构的一些基本结果见文献[1-3]. 我们考虑集合 $\mathrm{cd}(G)\backslash\{m\}$，此处 $m \in \mathrm{cd}(G)$. 定义图 $\Delta(G-m)$，其顶点集合是 $\rho(G-m)$，即由 $\mathrm{cd}(G)\backslash\{m\}$ 中次数的素因子组成. 对于 $p, q \in \rho(G-m)$，若 pq 整除某个次数 $a \in \mathrm{cd}(G)\backslash\{m\}$，则定义为 p 和 q 之间有一条边. $n(\Delta(G-m))$ 表示图 $\Delta(G-m)$ 的连通分支的个数. 若 G 是不可解群，我们考虑单群的情况. 若 G 交换或 $\mathrm{cd}(G)=\{1, a\}$，且 $m=a$，$\mathrm{cd}(G)\backslash\{m\}=\varnothing$ 或 $\mathrm{cd}(G)\backslash\{m\}=\{1\}$，此时定义 $n(\Delta(G-m))=0$. 令 G 是一个非交换单群，由有限单群分类定理知 G 是下列之一：散在单群、交错单群 $A_n(n \geqslant 5)$、李型单群. 文献[4]已经讨论了散在单群和交错单群的情况. 本文讨论李型单群的情况.

下文我们用 G 表示 q 元域 F 上的有限李型单群，其中 $q=p^f$ 是素数 p 的方幂. 用 T 表示伴随型的单线性代数群，σ 表示 T 的自同态，则稳定子集 $T_\sigma=S$ 是有限的. 设 $d=|S|/|G|$，S 的导群同构于 G. 设 $\chi \in \mathrm{Irr}(S)$，$\mu \in \mathrm{Irr}(\chi_G)$，则由文献[2]中的定理 11.29 得 $\chi(1)/\mu(1)$ 整除 d. 而且由文献[5]得 S 和 G 的幂幺特征标次数是相同的.

引理 1[6]　若 G 是非交换单群，则 $\rho(G)=\pi(|G|)$.

由引理 1 知对非交换单群都有 $\rho(G)=\pi(|G|)$，所以我们只要找到 G 的 a 个特殊的不可约特征标，使得它们中任何 $a-1$ 个的次数的素因子组成的集合恰好是 $\pi(|G|)$. 且这 $a-1$ 个特征标次数构成的素图最多有 3 个连通分支. 那么取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数，都有 $n(\Delta(G-m)) \leqslant 3$. 下面是具体的证明过程.

定理 1　若 G 是李型单群，则对任意 $m \in \mathrm{cd}(G)$，$\Delta(G-m)$ 至多有 3 个连通分支，即

$$n(\Delta(G-m)) \leqslant 3$$

证　分类型讨论.

(i) $A_n(q)$，$n \geqslant 1$.

设 $n=1$，即 $G \cong L_2(q)$，其中 $q=p^f$，$f \geqslant 1$. 易知此时若 $p=2$，则

① 收稿日期：2009-06-07
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10871032)；教育部博士点基金资助项目(20060285002)；北京市属高校科技创新平台项目(201098).
作者简介：梁登峰(1978-)，女，山西平遥人，讲师，主要从事有限群及其表示理论的研究.
通信作者：施武杰，教授.

$$\mathrm{cd}(G)=\{1,\ 2^f,\ 2^f-1,\ 2^f+1\}$$

若 p 是奇素数，$q=p^f>5$，则

$$\mathrm{cd}(G)=\left\{1,\ q,\ q-1,\ q+1,\ \frac{q+\varepsilon}{2}\right\}$$

其中 $\varepsilon=(-1)^{\frac{q-1}{2}}$. 若 $q=5$，则 $L_2(5)\cong L_2(4)$. 所以在这种情况下取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数，都有 $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$.

设 $n=2$，即 $G\cong L_3(q)$，其中 $q=p^f$，$f\geqslant 1$. 若 $q=3,4$，由文献[7]知取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数，都有 $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$. 若 $q>4$，则由文献[8]知 G 的每个不可约特征标次数都整除集合

$$\{q^3,\ q(q+1),\ (q-1)(q^2+q+1),\ q(q^2+q+1),\ (q+1)(q^2+q+1),\ (q-1)^2(q+1)\}\subseteq \mathrm{cd}(G)$$

中的某个数，所以取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数，都有 $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$.

若 $n\geqslant 3$，$G\cong L_{n+1}(q)$，则由引理 1 知 $\rho(G)=\pi(|G|)$，且

$$|G|=q^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{i+1}-1)}{d}\qquad d=\gcd(n+1,\ q-1)$$

而且由文献[9]中的引理 2.2 知，特征标次数

$$\chi^{(1,\ 1,\ n-1)}(1)=q^3\ \frac{(q^{n-1}-1)(q^n-1)}{(q-1)(q^2-1)}$$

$$\chi_1(1)=(q-1)(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{n-1}-1)(q^n-1)$$

$$\chi_2(1)=(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{n-1}-1)(q^{n+1}-1)$$

$$\chi_3(1)=q\ \frac{(q^2-1)(q^3-1)\cdots(q^{n+1}-1)}{(q^2-1)(q^{n-1}-1)}$$

包含在 $\mathrm{cd}(PGL_{n+1}(q))$ 中.

由引理 1 前的一段知 $\chi^{(1,\ 1,\ n-1)}(1)\in\mathrm{cd}(G)$；对于 $\chi_j(1)$ $(j=1,2,3)$，G 的不可约特征标设为 $\mu_j\in\mathrm{Irr}((\chi_j)_G)$，则 $\chi_j(1)/\mu_j(1)$ 整除 $d=\gcd(n+1,\ q-1)$，所以整除 $q-1$. 由定理 1 前的论述知结论成立.

(ⅱ) $A_n(q^2)\cong U_{n+1}(q)$，$n\geqslant 2$.

若 $n=2$，即 $G\cong U_3(q^2)$，其中 $q=p^f$，则因 $U_3(2^2)$ 不是单群，所以 $q>2$. 此时由文献[8]知 G 的每个不可约特征标次数都整除集合

$$\{q^3,\ q(q-1),\ (q-1)(q^2-q+1),\ q(q^2-q+1),\ (q+1)(q^2-q+1),\ (q-1)(q+1)^2\}\subseteq \mathrm{cd}(G)$$

中的某个数，所以在这种情况下取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数都有 $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$.

若 $n\geqslant 3$，$G\cong U_{n+1}(q^2)$，则由引理 1 知 $\rho(G)=\pi(|G|)$，且

$$|G|=q^{\frac{n(n+1)}{2}}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{i+1}-(-1)^{i+1})}{d}\qquad d=\gcd(n+1,\ q+1)$$

若 G 同构于 $U_4(4)$,$U_4(9)$,$U_5(4)$，则由文献[7]知取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数都有 $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$. 若 G 不同构于 $U_4(4)$,$U_4(9)$,$U_5(4)$，则由文献[9]中的引理 2.3 知特征标次数

$$\chi^{(1,\ 1,\ n-1)}(1)=q^3\ \frac{(q^{n-1}-(-1)^{n-1})(q^n-(-1)^n)}{(q+1)(q^2-1)}$$

$$\chi_1(1)=(q+1)(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^{n-1}-(-1)^{n-1})(q^n-(-1)^n)$$

$$\chi_2(1)=(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^{n-1}-(-1)^{n-1})(q^{n+1}-(-1)^{n+1})$$

$$\chi_3(1)=q\ \frac{(q^2-1)(q^3+1)\cdots(q^{n+1}-(-1)^{n+1})}{(q^2-1)(q^{n-1}-(-1)^{n-1})}$$

包含在 $\mathrm{cd}(PU_{n+1}(q^2))$ 中.

由引理 1 前的一段知 $\chi^{(1,\ 1,\ n-1)}(1)\in\mathrm{cd}(G)$；对于 $\chi_j(1)(j=1,2,3)$，G 的不可约特征标设为 $\mu_j\in\mathrm{Irr}((\chi_j)_G)$，则 $\chi_j(1)/\mu_j(1)$ 整除 $d=\gcd(n+1,\ q+1)$，所以整除 $q+1$. 由定理 1 前面的论述知结论成立.

(ⅲ) $B_n(q)$，$n\geqslant 2$.

设 $n=2$，即 $G\cong B_2(q)\cong C_2(q)\cong O_7(q)$，其中 $q=p^f$. 若 $q=2$，$O_7(2)$ 不是单群. 若 $q=3$，$G\cong O_7(3)$，由文献[7]知取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数，都有 $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$.

下面假设 $q>3$. 此时

$$|G|=\frac{q^4(q-1)^2(q^2-1)^2(q^4-1)}{2,q-1}$$

由文献[10]和文献[11]知 G 有特征标次数

$$\chi_1(1)=(q-1)^2(q^2-1)^2$$
$$\chi_2(1)=q(q-1)(q^4-1)$$
$$\chi_3(1)=q(q^2-1)(q^4-1)$$

由定理1前的论述知结论成立.

若 $n\geqslant 3$, $G\cong O_{2n+1}(q)$, 则由引理1知 $\rho(G)=\pi(|G|)$, 且

$$|G|=q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{2i}-1)}{d}\qquad d=\gcd(2,q-1)$$

由文献[12]中的引理2.2知特征标次数

$$\chi^{\alpha}(1)=\frac{1}{2}q^4\frac{(q^{n-2}-1)(q^{n-1}-1)(q^{n-1}+1)(q^n+1)}{(q^2-1)^2}$$
$$\chi_c(1)=(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(n-1)}-1)(q^n-1)$$
$$\chi_1(1)=q\frac{(q^4-1)(q^{\{6\}}-1)\cdots(q^{2(n-1)}-1)(q^{2n}-1)}{q^{n-1}+1}$$

包含在 $\mathrm{cd}(SO_{2n+1}(q))$ 中. 其中 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 & n\\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$.

由引理1前的一段知 $\chi^{\alpha}(1)\in\mathrm{cd}(G)$, 对于 $\chi_c(1)$ 和 $\chi_1(1)$, G 的不可约特征标设为 $\mu_j\in\mathrm{Irr}((\chi_j)_G)$, 其中 $j=c,1$, 则 $\chi_j(1)/\mu_j(1)$ 整除 $d=\gcd(2,q-1)$, 所以整除 $q-1$. 由定理1前的论述知结论成立.

(iv) $C_n(q)$, $n\geqslant 3$.

若 q 是偶数, 则对所有的 n 有 $B_n(q)\cong C_n(q)$, 这种情况上面已经讨论. 下面假设 q 是奇数. 此时

$$|G|=q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{2i}-1)}{d}\qquad d=\gcd(2,q-1)=2$$

若 $n=3$, 即 $G\cong S_6(q)$, $|G|=\frac{1}{2}q^9(q-1)^3(q^2-1)^3(q^3-1)(q^4-1)(q^6-1)$, 则由文献[13]知 G 有特征标次数

$$\chi_{\alpha}(1)=q^3(q^3-1)(q^6-1)$$
$$\chi^{(1,1,q-2)}(1)=q(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^6-1)$$
$$\chi_s(1)=(q^3-1)(q^2-1)(q^4-1)$$

其中 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2\\ & 1\end{pmatrix}$. 由定理1前的论述知结论成立.

若 $n>3$, $G\cong S_{2n}(q)$, 则由引理1知 $\rho(G)=\pi(|G|)$, 且

$$|G|=\frac{1}{2}q^{n^2}\prod_{i=1}^{n}\frac{(q^{2i}-1)}{d}\qquad d=\gcd(2,q-1)$$

由文献[12]中的引理2.3知特征标次数

$$\chi^{\alpha}(1)=q^3(q^{2(n-2)}-1)(q^{2n}-1)/(q^2-1)^2$$
$$\chi_c(1)=(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(n-1)}-1)(q^n-1)$$
$$\chi_1(1)=q^2\frac{(q^2+1)(q^6-1)(q^8-1)\cdots(q^{2(n-1)}-1)(q^{2n}-1)}{(q^{n-2}+1)}$$

包含在 $\mathrm{cd}(S_{2n}(q))$ 中. 其中 $\alpha=\begin{pmatrix}1 & n-1\\ & 1\end{pmatrix}$.

由引理1前的一段知 $\chi^{\alpha}(1)\in\mathrm{cd}(G)$, 对于 $\chi_c(1)$ 和 $\chi_1(1)$, G 的不可约特征标设为 $\mu_j\in\mathrm{Irr}((\mu_j)_G)$, 其中 $j=c,1$. 则 $\chi_j(1)/\mu_j(1)$ 整除 $d=2$ (q 是奇数). 由定理1前的论述知结论成立.

(v) $D_n(q)$, $n\geqslant 4$.

若 $n=4$，当 $q=2,3$ 时，由文献[7]知取 m 为 $\mathrm{cd}(G)$ 中的任何一个数都有 $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$. 所以下面假设 $q>3$. 此时

$$|G|=\frac{q^{12}(q-1)^4(q^2-1)^4(q^3-1)(q^4-1)^2(q^6-1)}{d}\qquad d=\gcd(4,\ q^4-1)$$

由文献[12]知 $PCO_8(q)^o$ 有特征标次数

$$\chi_\beta(1)=\frac{1}{2}q^3(q^2-1)^4(q^6-1)$$
$$\chi_1(1)=q^2(q-1)^2(q^3-1)(q^4-1)^2(q^6-1)$$
$$\chi_c(1)=(q-1)^4(q^2-1)^2(q^3-1)(q^4-1)^2$$

其中 $\beta=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$. 由定理 1 前的论述知结论成立.

若 $n=5$，且

$$|G|=\frac{q^{20}(q-1)^5(q^2-1)^4(q^3-1)(q^4-1)^2(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)}{d}$$

其中 $d=\gcd(4,\ q^5-1)$，则由文献[12]知 G 有特征标次数

$$\chi_1(1)=q^2(q-1)^3(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)$$
$$\chi_\beta(1)=q^2(q^2+1)(q^4+1)$$
$$\chi_s(1)=(q-1)(q^4-1)^2(q^5-1)(q^6-1)$$

其中 $\beta=\begin{pmatrix}1&5\\0&1\end{pmatrix}$. 由定理 1 前的论述知结论成立.

若 $n>5$，则由引理 1 知 $\rho(G)=\pi(|G|)$，且

$$|G|=q^{n(n-1)}(q^n-1)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{(q^{2i}-1)}{d}\qquad d=\gcd(4,\ q^n-1)$$

由文献[12]中的引理 2.4 知 $P(CO_{2n}(q)^o)$ 有特征标次数

$$\chi^\alpha(1)=q^6\ \frac{(q^{n-4}+1)(q^{2(n-3)}-1)(q^{2(n-1)}-1)(q^n-1)}{(q^2-1)^2(q^4-1)}$$
$$\chi_c(1)=\frac{(q^2-1)(q^4-1)\cdots(q^{2(n-2)}-1)(q^{2(n-1)}-1)(q^n-1)}{(q+1)(q^{n-1}+1)}$$
$$\chi_1(1)=q^2\ \frac{(q^2+1)(q^6-1)\cdots(q^{2(n-2)}-1)(q^{2(n-1)}-1)(q^n-1)}{(q+1)(q^{n-3}+1)}$$

其中 $\alpha=\begin{pmatrix}1&n-2\\&1\ 2\end{pmatrix}$.

由引理 1 上面的一段知 $\chi^\alpha(1)\in\mathrm{cd}(G)$. 对于 $\chi_c(1)$ 和 $\chi_1(1)$，G 的不可约特征标设为 $\mu_j\in\mathrm{Irr}((\chi_j)_G)$，其中 $j=c,1$，则 $\chi_j(1)/\mu_j(1)$ 整除 d，所以也整除 4. 由定理 1 前的论述知结论成立.

(vi) $D_n(q^2)$，$n\geqslant 4$.

若 $n=4$，$|G|=q^{12}(q-1)^3(q^2-1)^3(q^3-1)(q^4-1)(q^6-1)(q^8-1)/d$，$d=\gcd(4,\ q^4+1)$，则由文献[12]中的引理 2.5 知 $P(CO_8^-(q)^o)$ 有特征标次数

$$\chi_c(1)=(q-1)^3(q^2-1)^3(q^3-1)(q^4-1)(q^6-1)$$
$$\chi_1(1)=q^2(q-1)(q^2-1)(q^3-1)(q^6-1)(q^8-1)$$
$$\chi_2(1)=q^3(q-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^8-1)$$

由定理 1 前的论述知结论成立.

若 $n>4$，由引理 1 知 $\rho(G)=\pi(|G|)$，且

$$|G|=q^{n(n-1)}(q^n+1)\prod_{i=1}^{n-1}\frac{(q^{2i}-1)}{d}\qquad d=\gcd(4,\ q^n+1)$$

由文献[12]中的引理 2.5 知 $P(CO_{2n}^-(q)^o)$ 有特征标次数

$$\chi^{\alpha}(1)=\frac{1}{2}q^{3}\ \frac{(q^{n-3}-1)(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)(q^{n}+1)}{(q^{2}+1)(q-1)^{2}}$$

$$\chi_{c}(1)=(q^{2}-1)(q^{4}-1)\cdots(q^{2(n-2)}-1)(q^{2(n-1)}-1)$$

$$\chi_{1}(1)=q^{2}\ \frac{(q^{2}+1)(q^{6}-1)\cdots(q^{2(n-2)}-1)(q^{2(n-1)}-1)(q^{n}+1)}{(q^{n-2}+1)}$$

其中 $\alpha=\binom{0\ 2\ n-1}{1}$.

由引理1前的一段知 $\chi^{\alpha}(1)\in \mathrm{cd}(G)$. 对于 $\chi_{c}(1)$ 和 $\chi_{1}(1)$，G 的不可约特征标设为 $\mu_{j}\in \mathrm{Irr}((\chi_{j})_{G})$，其中 $j=c$，1，则 $\chi_{j}(1)/\mu_{j}(1)$ 整除 d，所以也整除 4. 由定理1前的论述知结论成立.

若 G 是例外型李型单群，则由文献[5]及定理1前的论述有：对任意 $m\in \mathrm{cd}(G)$，$\Delta(G-m)$ 至多有两个连通分支.

参考文献:

[1] HUPPERT B. Character Theory of Finite Groups [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1998.

[2] ISAACS I M. Character Theory of Finite Groups [M]. New York: Academic Press, 1976.

[3] MANZ O, WOLF T R. Representations of Solvable Groups [M]. England: Cambridge University Press, 1993.

[4] 梁登峰，李士恒，施武杰. 交错单群和散在单群的一种特征标次数图 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1)：1－5.

[5] CARTER R W. Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters [M]. New York: Wiley, 1985.

[6] MICHLER G O. Brauer's Conjectures and the Classification of Finite Simple Groups [M]//Representation Theory VII Groups and Orders, Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1986: 129－142.

[7] CONWAY J H, CURTIS R T, NORTON S P, et al. Atlas of Finite Groups [M]. Oxford: Clarendon Press, 1985.

[8] SIMPSON W A, FRAME J S. The Character Tables for $SL(3, q)$, $SU(3, q^{2})$, $PSL(3, q)$, $PSU(3, q^{2})$ [J]. Canad J Math, 1973, 25: 486－494.

[9] WHITE D L. Degree Graphs of Simple Linear and Unitary Groups [J]. Comm Algebra, 2006, 34: 2907－2921.

[10] ENOMOTO H. The Characters of the Finite Symplectic Group $S_{p}(4, q)$, $q=2^{f}$ [J]. Osaka J Math, 1972(9): 75－94.

[11] SCRINIVASAN B. The Characters of the Finite Symplectic Group $S_{p}(4, q)$ [J]. Trans Amer Math Soc, 1968, 131: 488－525.

[12] WHITE D L. Degree Graphs of Simple Orthogonal and Symplectic Groups [J]. Algebra, 2008, 319: 833－845.

[13] LUBECK F. Charaktertafeln fur die Gruppen $CSp_{6}(q)$ Mit Ungeradern q und $Sp_{6}(q)$ Mit Geradern q [D]. Heidelberg: University of Heidelberg, 1993.

A Kind of Garphs of Lie Type Simple Groups

LIANG Deng-feng[1], LI Shi-heng[2], SHI Wu-jie[3]

1. Department of Mathematics, Beijing Technology and Business University, Beijing 100048, China;

2. Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China;

3. School of Mathematics, Soochow University, Suzhou Jiangsu 215006, China

Abstract: In this paper the authors get the conclusion: if G is a simple group of Lie type, then $n(\Delta(G-m))\leqslant 3$ for all $m\in \mathrm{cd}(G)$.

Key words: simple groups of Lie type; irreducible character; character degrees of garphs

责任编辑 覃吉康