文章编号:1000-5471(2011)01-0017-04

s^*-半置换子群与有限群的 p-幂零性①

祝 明, 曹洪平

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 群 G 的子群 H 称为在 G 中 s^*-半置换,若对任意的 $p \mid |G|$,只要 $(p, |H|)=1$,就存在 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$,使得 $HP = PH$. 利用子群的 s^*-半置换性给出了一个群为幂零群或 p-幂零群的若干充分条件.

关 键 词: s^*-半置换子群;幂零群;p-幂零群

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A

在对有限群的研究中,人们往往利用子群的性质确定群的结构. 文献[1]引进了 s-半正规子群的概念后,许多群论学者利用子群的 s-半正规性获得了大量丰富的结果. 本文将原概念中的条件“G中任意Sylow p-子群与 H 可换”弱化为“G中存在Sylow p-子群与 H 可换”(其中 $p \in \pi(G)$,且$(p, |H|)=1$),并引进了 s^*-半置换的概念,讨论了 s^*-半置换子群的性质并利用它给出了一个群为幂零群或 p-幂零群的若干充分条件. 另外,文献[2]引进了 B_p 群的概念:G 称为 B_p 群,如果 $N_G(P)$ 为 p-幂零群蕴含 G 为 p-幂零群,其中 $p \in \pi(G)$. 并研讨了内-B_p 群和极小非 B_p 群的结构,同时给出了群 G 为 B_p 群的几个充分条件.

文中的群 G 都是有限群,所用的概念和符号都是标准的,具体可以参见文献[3]. 下面先给出本文所用的定义以及引理.

定义 群 G 的子群 H 称为在 G 中 s^*-半置换,若对任意的 $p \mid |G|$,只要 $(p, |H|)=1$,就存在 $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$,使得 $HP=PH$.

显然,s-半正规子群为 s^*-半置换子群,反之不然. 例如:$A=\langle(12)\rangle$,$A_1=\langle(123)\rangle$,$A_2=\langle(234)\rangle$ 均为 S_4 的子群,且 A_1 和 A_2 均属于 $\mathrm{Syl}_3(S_4)$. 易验证 $AA_1=A_1A$. $AA_2 \neq A_2A$,从而 A 是 S_4 的 s^*-半置换子群,但不是 S_4 的 s-半正规子群.

引理 1 (1) 若 H 为 G 的 s^*-半置换子群,$H \leqslant K \leqslant G$,则 H 为 K 的 s^*-半置换子群.

(2) 若 H 为 G 的 s^*-半置换子群,$K \trianglelefteq G$,则 HK/K 为 G/K 的 s^*-半置换子群.

证 (1) 设 H 为 G 的 s^*-半置换子群,且

$$X=\{P \in \mathrm{Syl}_p(G) \mid HP=PH, (p, |H|)=1, \text{其中 } p \in \pi(G)\}$$

则对任意 $P \in X$,有 $P \cap K \in \mathrm{Syl}_p(K)$,且 $H(P \cap K)=(P \cap K)H$,从而 H 为 K 的 s^*-半置换子群.

(2) 设 H 为 G 的 s^*-半置换子群,且

$$X=\{P \in \mathrm{Syl}_p(G) \mid HP=PH, (p, |H|)=1, \text{其中 } p \in \pi(G)\}$$

则对任意 $P \in X$,有 $PK/K \in \mathrm{Syl}_p(G/K)$,且满足

$$HK/K \cdot PK/K = HPK/K = PHK/K = PK/K \cdot HK/K$$

显然 $(p, |HK/K|)=1$. 从而 HK/K 为 G/K 的 s^*-半置换子群.

---

① 收稿日期:2010-01-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771172).

作者简介:祝 明(1981-),男,河南信阳人,硕士研究生,主要从事有限群论的研究.

通信作者:曹洪平,副教授.

定理1　设 p 为 $|G|$ 的一个素因子，且 $(|G|, p-1)=1$. 若 G 的 p 阶及4阶循环子群(若 $p=2$)在 G 中 s^* -半置换，则 G 为 p -幂零群.

证　假设定理不成立，设 G 为极小阶反例.

定理条件显然是子群遗传的. 由 G 的极小性知 G 为内 p -幂零群. 由文献[4]知：$G=PQ$，$|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$，$p\neq q$，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，$P\trianglelefteq G$，$Q=\langle a\rangle$ 不正规于 G.

若 $p\neq 2$，则 $\exp(P)=p$；若 $p=2$，则 $\exp(P)\leqslant 4$. 从而对于任意 $x\in P$，有 $|x|$ 等于 p 或4. 由定理条件知，存在 $Q_1\in \mathrm{Syl}_q(G)$，使得 $\langle x\rangle Q_1\leqslant G$. 若 $|x|=4$，由文献[3]知，$\langle x\rangle Q_1=\langle x\rangle \ltimes Q_1$，即 $x\in N_G(Q_1)$；若 $|x|=p$，由文献[5]的引理2.8知，$x\in N_G(Q_1)$. 由 x 的任意性得，$P\leqslant N_G(Q_1)$. 而 $G=PQ=PQ_1$，故 $Q_1\trianglelefteq G$，从而 G 为 p -幂零群，矛盾. 故极小阶反例不存在，G 为 p -幂零群.

注1　定理1中条件“$(|G|, p-1)=1$”不能去掉. 例如取 $G=S_3$，则 G 的3阶子群在 G 中正规，从而在 G 中 s^* -半置换，但 G 不是3-幂零群. 另外，定理1推广了文献[6]的定理1及定理5.

定理2　设 p 为 $|G|$ 的一个素因子，且 $(|G|, p-1)=1$；$N\trianglelefteq G$，且 G/N 为 p -幂零群. 若 N 的 p 阶及4阶循环子群(若 $p=2$)在 G 中 s^* -半置换，则 G 为 p -幂零群.

证　假设定理不成立，设 G 为极小阶反例.

(1) G 为内 p -幂零群.

定理条件显然是子群遗传的. 由 G 的极小性知 G 为内 p -幂零群. 由文献[4]知：$G=PQ$，$|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$，$p\neq q$，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，$P\trianglelefteq G$，$Q=\langle a\rangle$ 不正规于 G.

(2) N 为 p -群.

由定理1知，N 为 p -幂零群. 设 $N_{p'}$ 为 N 的正规 p -补，则 $N_{p'}\ \mathrm{char}\ N\triangleleft G$，从而 $N_{p'}\triangleleft G$. 若 $N_{p'}\neq 1$，则存在 $g\in G$，使得 $N_{p'}\leqslant Q^g$. 由引理1(2)知 $G/N_{p'}$ 满足定理条件，从而 $G/N_{p'}$ 为 p -幂零群，即

$$G/N_{p'}=[Q^g/N_{p'}]\cdot PN_{p'}/N_{p'}$$

则 $Q^g\triangleleft G$，从而 $Q\triangleleft G$，矛盾. 故得 $N_{p'}=1$，从而 N 为 p -群.

(3) 极小阶反例不存在.

由(2)知，N 为 p -群，从而 $N\leqslant P$. 若 $N<P$，则 $NQ<G$，从而 NQ 为 p -幂零群，故 $NQ=N\times Q$. 由于 G/N 为 p -幂零群，故 $G/N=[NQ/N]\cdot P/N$，从而 $NQ\triangleleft G$. 而 $Q\ \mathrm{char}\ NQ\triangleleft G$，所以 $Q\triangleleft G$，矛盾. 故 $N=P$，但由定理1知，G 为 p -幂零群，矛盾. 故极小阶反例不存在，从而 G 为 p -幂零群.

定理3　设 G 的每个 p 阶子群含于 $Z_{\infty}(G)$，4阶循环子群在 G 中 s^* -半置换，则 G 为 p -幂零群.

证　假设定理不成立，设 G 为极小阶反例.

定理条件显然是子群遗传的. 由 G 的极小性知 G 为内 p -幂零群. 由文献[4]知：$G=PQ$，$|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$，$p\neq q$，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，$P\trianglelefteq G$，$Q=\langle a\rangle$ 不正规于 G. 当 $p\neq 2$ 时，$\exp(P)=p$；当 $p=2$ 时，$\exp(P)\leqslant 4$.

若 $p>2$，则由定理条件知 $P\leqslant Z_{\infty}(G)$. 而由文献[3]知，$Z_{\infty}(G)Q$ 为幂零群，从而 $G=PQ=Z_{\infty}(G)Q$ 幂零，矛盾，故 $p=2$. 若 P 为交换群，则 P 为初等交换群，同理可得矛盾，故 P 为非交换群. 任取 $c\in P$，若 $|c|=4$，则 $\langle c\rangle$ 在 G 中 s^* -半置换，故存在 $Q_1\in \mathrm{Syl}_q(G)$，使得 $\langle c\rangle Q_1\leqslant G$. 由 P 的非交换性知 $\langle c\rangle Q_1<G$，则 $\langle c\rangle Q_1=\langle c\rangle\ltimes Q_1$，$c\in N_G(Q_1)$；若 $|c|=2$，则 $c\in Z_{\infty}(G)$. 而由 $Z_{\infty}(G)Q_1$ 幂零知也有 $c\in N_G(Q_1)$，从而由 c 的任意性得 $P\leqslant N_G(Q_1)$，故 $Q_1\trianglelefteq G$，矛盾. 故极小阶反例不存在，从而 G 为 p -幂零群.

注2　定理3推广了文献[6]的定理3.

推论1　设 G 的每个极小阶子群含于 $Z_{\infty}(G)$，4阶循环子群在 G 中 s^* -半置换，则 G 为幂零群.

证　因为 G 幂零当且仅当对任意素数 $p\in\pi(G)$，G 为 p -幂零群. 故由定理3直接可得.

定理4　设 $N\trianglelefteq G$，G/N 为 p -幂零群. 若 N 的 p 阶子群包含于 $Z_{\infty}(G)$，且4阶循环子群(若 $p=2$)在 G 中 s^* -半置换，则 G 为 p -幂零群.

证　假设定理不成立，设 G 为极小阶反例.

(1) G 为内 p -幂零群.

定理条件显然是子群遗传的．由 G 的极小性知 G 为内 p-幂零群．由文献[4]知：$G=PQ$，$|G|=p^{\alpha}q^{\beta}$，$p\neq q$，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，$P\trianglelefteq G$，$Q=\langle a\rangle$ 不正规于 G．当 $p\neq 2$ 时，$\exp(P)=p$；当 $p=2$ 时，$\exp(P)\leqslant 4$．

(2) N 为幂零群，且 $p=2$．

若 $N=G$，则由定理 3 知，G 为 p-幂零群，矛盾；若 $N=1$，则由定理条件知 G 为 p-幂零群，矛盾，故 $1<N<G$，从而 N 为 p-幂零群．而由 $P\trianglelefteq G$ 知 $(P\cap N)\trianglelefteq N$，故 N 为幂零群．

若 $p>2$，则由定理条件知 $P\cap N\leqslant Z_{\infty}(G)$．由 $G/(P\cap N)\lesssim G/P\times G/N$ 及 G/P 为 q-群、G/N 为 p-幂零群知 $G/(P\cap N)$ 为 p-幂零群，即 $Q(P\cap N)/N\trianglelefteq G/(P\cap N)$．若 $Q(P\cap N)=G$，则由定理 3 知 G 为 p-幂零群，矛盾．故 $Q(P\cap N)<G$，从而 $Q(P\cap N)$ 为 p-幂零群，即 $Q\ \mathrm{char}\ Q(P\cap N)\trianglelefteq G$，矛盾．于是 $p=2$．

(3) 极小阶反例不存在．

由(2)，可设 $N=N_p\times N_q$，其中 $P\cap N=N_p\in \mathrm{Syl}_p(N)$，$N\cap Q=N_q\in \mathrm{Syl}_q(N)$．若 $N_q=Q$，则 $Q\ \mathrm{char}\ N\trianglelefteq G$，矛盾；若 $N_q=1$，则 $N\leqslant P$．若 $N=P$，由定理 3 可知，G 为 p-幂零群，故 $N<P$，从而 $NQ<G$，故 NQ 为 p-幂零群，即 $Q\ \mathrm{char}\ NQ$．而 G/N 为 p-幂零群，故 $NQ\trianglelefteq G$，则 $Q\trianglelefteq G$，矛盾．即 $1<N_q<Q$，又有 $PN_q<G$．易知 $N_q\leqslant Z(G)\leqslant Z_{\infty}(G)$，从而 N/N_q 的 p 阶子群包含在 $Z_{\infty}(G)/N_q\leqslant Z_{\infty}(G/N_q)$ 中．易验证 N/N_q 和 G/N_q 满足定理条件，由 G 的极小性知 G/N_q 为 p-幂零群，故 G 为 p-幂零群，矛盾．因此极小阶反例不存在，G 为 p-幂零群．

注 3　定理 4 推广了文献[6]的定理 4．

定理 5　设 p 为 $|G|$ 的奇素因子，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$．若 $N_G(P)$ 为 p-幂零群，且 P 的极大子群在 G 中 s^*-半置换，则 G 为 p-幂零群．

证　假设定理不成立，设 G 为极小阶反例．

(1) 若 $1\neq L\trianglelefteq G$，$P\leqslant H<G$，则 G/L，H 均为 B_p 群．

易知 G/L 满足定理条件，故由 G 的极小性知，G/L 为 p-幂零群，即 G/L 为 B_p 群．

又 $N_H(P)\leqslant N_G(P)$，故由 $N_G(P)$ 为 p-幂零群知，$N_H(P)$ 为 p-幂零群．再由引理 1(1) 知，P 的极大子群在 H 中 s^*-半置换，从而由 G 的选择知 H 为 p-幂零群，即 H 为 B_p 群．

(2) G 有唯一的极小正规子群 N，且 $N=O_p(G)=C_G(N)<P$．

由(1) 及文献[2]的定理 1.4 易知，$N=O_p(G)=C_G(N)$．

若 $P=N$，则 $G=N_G(N)=N_G(P)$ 为 p-幂零群，矛盾．从而 $N=O_p(G)<P$．

(3) $|N|=p$．

由(2) 可设 $|N|=p^n$（n 为自然数）．显然 $\Phi(G)=1$，从而 $N\nleqslant\Phi(G)$，即 $N\nleqslant\Phi(P)$，故存在 P 的极大子群 P_1，使得 $N\nleqslant P_1$，且 $P=P_1N$．由定理条件知 P_1 在 G 中 s^*-半置换，即存在 $Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$（其中 $q\in\pi(G)(q\neq p)$），使得 $P_1Q=QP_1$．而 $N\cap P_1=N\cap P_1Q\trianglelefteq P_1Q$，故 $Q\leqslant N_G(N\cap P_1)$．又 $N\cap P_1\trianglelefteq P$，故易知 $N\cap P_1\trianglelefteq G$，从而 $N\cap P_1=1$ 或者 $N\cap P_1=N$．但 $N\nleqslant P_1$，故 $N\cap P_1=1$，即 $|P|=|P_1N|=|P_1||N|$，从而 $|N|=p$．

(4) 极小阶反例不存在．

由(3) 知，$G/C_G(N)=N_G(N)/C_G(N)\lesssim \mathrm{Aut}(N)\cong Z_{p-1}$，而由(2) 知 $O_p(G)=C_G(O_p(G))$，所以

$$|G|_p=|C_G(N)|_p=|O_p(G)|$$

但这与 $O_p(G)<P$ 矛盾．故极小反例不存在，从而 G 为 p-幂零群．

注 4　在定理 5 中去掉条件"$N_G(P)$ 为 p-幂零群"结论不一定成立．例如取 $G=A_5$，且 $p=5$，由于 G 的每个 Sylow 5-子群的极大子群为 1，当然在 G 中 s^*-半置换，但 G 不是 5-幂零群．

定理 6　设 p 为 $|G|$ 的奇素因子，$N\trianglelefteq G$ 且 G/N 为 p-幂零群，$P\in \mathrm{Syl}_p(N)$．若 $N_G(P)$ 为 p-幂零群，且 P 的每个极大子群均在 G 中 s^*-半置换，则 G 为 p-幂零群．

证　对群 G 的阶用归纳法．

由引理 1(1) 及定理 5 可知，N 为 p-幂零群. 设 $N_{p'}$ 为 N 的正规 p-补，则 $N_{p'} \trianglelefteq G$；若 $N_{p'} \neq 1$，则由引理 1(2) 可知，$G/N_{p'}$ 满足定理条件，从而由归纳假设知 $G/N_{p'}$ 为 p-幂零群，故 G 为 p-幂零群.

下设 $N_{p'}=1$，则 $N=P$ 为 p-群. 由 G/N 为 p-幂零群知，H/N 为 G/N 的正规 p-补；由 Schur-Zassenhaus 定理知，存在 H 的 Hall p'-子群 K，使得 $H=KN$；由定理 5 知，H 为 p-幂零群，则 K char $H \trianglelefteq G$，从而 $K \trianglelefteq G$，即 G 为 p-幂零群.

参考文献：

[1] 陈重穆. 关于 Srinivasan 的一个定理 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，1987，12(1)：1－4.

[2] 陈重穆. 关于 B_p 群 [J]. 数学学报，1989，32(6)：834－840.

[3] 徐明曜，黄建华，李慧陵，等. 有限群导引(下册) [M]. 北京：科学出版社，2001.

[4] 陈重穆. 内外 Σ-群与极小 Σ-群 [M]. 重庆：西南师范大学出版社，1988.

[5] CHEN Gui-yun，LI Jin-bao. The Influence of X-Semipermutability of Subgroups on the Structure of Finite Groups [J]. Sci China：Ser A-Math，2009，52(2)：261－271.

[6] 王丽芳. s-半置换子群对群的幂零性的影响 [J]. 山西师范大学学报：自然科学版，2006，20(4)：6－9.

[7] 李方方，曹洪平. 子群的性质对有限群结构的影响 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(8)：5－8.

[8] 胡接春，陈贵云. 极大交换子群的阶对群构造的影响 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(10)：106－108.

s^*-Semipermutable Subgroups and the p-Nilpotency of Finite Groups

ZHU Ming， CAO Hong-ping

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：A subgroup H of a group G is said to s^*-semipermutable in G if there exists a Sylow p-subgroup P of G with $(p, |H|)=1$ such that $HP=PH$ for every $p \in \pi(G)$. With s^*-semipermutable subgroups, some sufficient conditions of nilpotent and p-nilpotent group are obtained in this paper.

Key words：s^*-semipermutable subgroups；nilpotent group；p-nilpotent group

责任编辑 覃吉康