第 36 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2011 年 2 月
Vol. 36 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2011

文章编号:1000-5471(2011)01-0010-07

自同构群阶为 $8pq$ 的一类有限群[①]

夏巧珍, 陈贵云, 曹洪平

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 得出了自同构群阶为 $8pq$ 的幂零群及 Sylow 2-子群交换的非幂零群的结构.

关 键 词: 有限群,幂零群,自同构群,Sylow 子群

中图分类号:O152.1 **文献标志码:A**

对于给定的自然数 m,方程 $|A(G)|=m$ 的求解是有趣但又困难的课题. 本文得出了 $m=8pq$ 的幂零群及 Sylow 2-子群交换的非幂零群的结构.

本文中 G 表示有限群,p,q 为不同的奇素数,G_p 表示 G 的 Sylow p-子群,$A(G)$ 表示 G 的自同构群,$I(G)$ 表示 G 的内自同构群,$A_c(G)$ 表示 G 的中心自同构群,$S \lessdot R$ 表示 S 是 R 的极大子群,$A \lesssim$ 表示 A 与 G 的某个子群同构. 其他符号都是标准的.

定理 1 设 G 是有限幂零群,那么 $|A(G)|=8pq$ ($p<q$) 当且仅当 G 为下列群之一:

$G_1=C_3\times C_{2p+1}\times C_{2q+1}$,其中 $2p+1$,$2q+1$ 为素数.

$G_2=C_{3^2}\times C_{5^2}$;

$G_3=C_3\times C_{(4p+1)^2}$,其中 $4p+1$ 为素数;

$G_4=C_5\times C_{(2p+1)^2}$,其中 $2p+1$ 为素数;

$G_5=C_{3^2}\times C_{4q+1}$,其中 $4q+1$ 为素数;

$G_6=C_{5^2}\times C_{2q+1}$,其中 $2q+1$ 为素数;

$G_7=C_{5^2}\times C_7$;

$G_8=C_3\times C_{4pq+1}$,其中 $4pq+1$ 为素数;

$G_9=C_5\times C_{2pq+1}$,其中 $2pq+1$ 为素数;

$G_{10}=C_{2p+1}\times C_{4q+1}$,其中 $2p+1$,$4q+1$ 为素数;

$G_{11}=C_{2q+1}\times C_{4p+1}$,其中 $2q+1$,$4p+1$ 为素数;

$G_{12}=C_{8pq+1}$,其中 $8pq+1$ 为素数;

$G_{13}=C_{(8p+1)^2}$,其中 $8p+1$ 为素数;

$G_{i+13}=C_2\times G_i$,$1\leqslant i\leqslant 13$;

$G_{27}=C_{2^2}\times C_3\times C_{(2p+1)^2}$,其中 $2p+1$ 为素数;

$G_{28}=C_{2^2}\times C_{3^2}\times C_{2q+1}$,其中 $2q+1$ 为素数;

$G_{29}=C_{2^2}\times C_3\times C_{2pq+1}$,其中 $2pq+1$ 为素数;

$G_{30}=C_{2^2}\times C_{2p+1}\times C_{2q+1}$,其中 $2p+1$,$2q+1$ 为素数;

---

① 收稿日期:2010-04-29
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10771172).
作者简介:夏巧珍(1986-),女,江西崇仁人,硕士研究生,主要从事有限群的研究.
通信作者:陈贵云,教授,博士生导师.

$G_{31}=C_{2^2}\times C_{4pq+1}$，其中 $4pq+1$ 为素数；

$G_{32}=C_{2^2}\times C_{(4p+1)^2}$，其中 $4p+1$ 为素数；

$G_{33}=C_{2^3}\times C_{2pq+1}$，其中 $2pq+1$ 为素数；

$G_{34}=C_{2^3}\times C_{(2p+1)^2}$，其中 $2p+1$ 为素数；

$G_{35}=C_2\times C_2\times C_2$；

$G_{36}=C_2\times C_2\times C_{4q+1}$，其中 $4q+1$ 为素数；

$G_{37}=C_2\times C_2\times C_{5^2}$；

$G_{38}=C_2\times C_2\times C_3\times C_{2q+1}$，其中 $2q+1$ 为素数.

证　设 $G=R\times P_1\times P_2\times\cdots\times P_n$，$R\in \mathrm{Syl}_2(G)$，$P_i\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$，$p_1<p_2<\cdots<p_n$ 为奇素数. 则

$$|A(G)|=|A(R)|\prod_{i=1}^{n}|A(P_i)|$$

1）$P_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 循环且 $|P_i|\leqslant p_i^2$.

若某个 P_i 不循环，不妨设 P_1 不循环. 若 $|P_1|\geqslant p_1^3$，由于

$$|P_1/Z(P_1)|\ \Big|\ |P_1/(Z(G)\cap P_1)|$$

$$|P_1/(Z(G)\cap P_1|\ \Big|\ |G/Z(G)|$$

$$|/Z(G)|\ \Big|\ |A(G)|$$

从而 $|P_1/Z(P_1)|\ \Big|\ 8pq$，所以 $|P_1/Z(P_1)|\leqslant p_1$.

由文献[1]知 $|P_1|\ \Big|\ |A(P_1)|$，则 $p_1^3\ \Big|\ 8pq$，矛盾. 因此 $P_1\cong C_{p_1}\times C_{p_1}$，则

$$|A(P_1)|=p_1(p_1-1)(p_1{}^2-1)$$

又由文献[2]知，$|A(P_1)|=|A(G)|$，则 $p_1(p_1-1)(p_1{}^2-1)=8pq$，矛盾. 因此 P_1 循环，从而 $P_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 都循环.

设 $|P_i|=p_i^{\alpha_i}$，则当 $\alpha_i\geqslant 1$ 时，$|A(P_i)|=p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)$，而 $p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)\mid pq$，所以 $|A(p_i)|\ \Big|\ 8pq$，于是 $\alpha_i\leqslant 2$，从而 $|P_i|\leqslant p_i^2$.

2）R 循环或 $R\cong C_2\times C_2$ 或 $G=R\cong G_{35}$.

若 R 不循环，则当 $|R|\geqslant 2^3$ 时，由 $|R/Z(R)|\ \Big|\ 8pq$ 得 $|R/Z(R)|\leqslant 2^3$，由文献[1]知 $|R|\ \Big|\ |A(R)|$，从而 $|R|\ \Big|\ 2^3$，则 $|R|=8$. 由于 $|A(Q_8)|=24$，$|A(D_8)|=8$，又由文献[2]知 R 交换，从而 $R\cong C_4\times C_2$ 或 $R\cong G_{35}$. 同样，由于 $|A(C_4\times C_2)|=8$，从而 $R\cong G_{35}$，而 $|A(R)|=8\times 3\times 7$，因此 $G=R\cong G_{35}$. 从而 R 不循环时 $R\cong C_2\times C_2$ 或 $G\cong G_{35}$.

3）当 R 循环时，由 1）及 G 幂零得 G 循环. 设 $|G|=n$，则 $\varphi(n)=8pq$，因此 $G\cong G_i(1\leqslant i\leqslant 34)$，其中 $\varphi(n)$ 是 n 的欧拉函数值.

4）当 $R\cong C_2\times C_2$ 时，G 同构于 G_{36}，G_{37} 或 G_{38}.

由于 $|A(R)|=6$，所以 $2^n\cdot 6\mid 8pq$，从而 $n\leqslant 2$ 且 $p=3$. 当 $n=1$ 时，$|A(P_1)|=4q$. 又由于 $|P_1|\leqslant p_1{}^2$，所以 G 同构于 G_{36} 或 G_{37}. 当 $n=2$ 时，$|A(P_1)|\cdot|A(P_2)|=4q$，由 $p_1<p_2$ 及文献[2]得 $G\cong G_{38}$.

推论 1　设 G 是有限群，$|A(G)|=8pq$. 若 G 幂零，则 G 交换.

证　由定理 1 可直接得证.

定理 2　设 G 是 Sylow 2-子群交换的有限非幂零群，$p\neq 3,7$，$q\neq 3,7$，那么 $|A(G)|=8pq$ $(p<q)$ 当且仅当 G 为下列群之一：

$G_{39}=\langle a,b\mid a^p=b^q=1,a^{-1}ba=b^r$，$r$ 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=8p+1$ 为素数；

$G_{40}=\langle a,b\mid a^8=b^q=1,a^{-1}ba=b^r$，$r$ 模 q 的指数为 $2\rangle$，其中 $q=2p+1$ 为素数；

$G_{41}=\langle a,b\mid a^4=b^q=1,a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$，其中 $q=4p+1$ 为素数；

$G_{42}=\langle a,b\mid a^8=b^q=1,a^{-1}ba=b^r$，$r$ 模 q 的指数为 $4\rangle$，其中 $q=4p+1$ 为素数；

$G_{43}=\langle a, g \mid a^q=g^8=1, g^{-1}ag=a^r$，$r$ 模 q 的指数为 $8\rangle$，其中 $q=8p+1$ 为素数；

$G_{44}=\langle c, b \mid c^4=b^q=1, c^{-1}bc=b^r$，$r$ 模 q 的指数为 $4\rangle$，其中 $q=8p+1$ 为素数；

$G_{45}=D_{2q}$，其中 $q=8p+1$ 为素数；

$G_{46}=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1=[a, b], a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r$，$r$ 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=2p+1$ 为素数；

$G_{47}=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1=[a, b], a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r$，$r$ 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=4p+1$ 为素数；

$G_{48}=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1=[a, b], a^{-1}ca=c^t, b^{-1}cb=c^r$，$t$ 模 q 的指数为 4，r 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=4p+1$ 为素数；

$G_{49}=\langle a, b, c \mid a^2=b^p=c^q=1=[a, b], a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r$，$r$ 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=8p+1$ 为素数；

$G_{50}=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1=[a, b], a^{-1}ca=c^t, b^{-1}cb=c^r$，$t$ 模 q 的指数为 4，r 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=8p+1$ 为素数；

$G_{51}=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1=[a, b], a^{-1}ca=c^t, b^{-1}cb=c^r$，$t$ 模 q 的指数为 8，r 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=8p+1$ 为素数；

$G_{52}=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r$，$r$ 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=2p+1$ 为素数；

$G_{53}=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r$，$r$ 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=4p+1$ 为素数；

$G_{54}=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^t, b^{-1}cb=c^r$，$t$ 模 q 的指数为 4，r 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=4p+1$ 为素数；

$G_{55}=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^m, a^{-1}ca=c^t, b^{-1}cb=c^r$，$m$ 模 p 的指数为 4，t 模 q 的指数为 4，r 模 q 的指数为 $p\rangle$，其中 $q=4p+1$ 为素数；

$G_{56}=H_1\times C_2$，其中 $H_1=\langle a, b \mid a^2=b^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$，$q=4p+1$；

$G_{57}=H_2\times C_2$，其中 $H_2=\langle a, b \mid a^4=b^q=1, a^{-1}ba=b^k$，$k$ 模 q 指数为 $4\rangle$，$q=4p+1$；

$G_{58}=H_4\times C_2$，其中 $H_4=\langle a, b, c \mid a^p=b^q=c^2=1, a^{-1}ba=b^r, c^{-1}bc=b^{-1}, [a, c]=1$，$r$ 模 q 指数为 $p\rangle$，$q=4p+1$；

$G_{59}=H_6\times C_2$，其中 $H_6=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1, [a, b]=1, a^{-1}ca=c^m, b^{-1}cb=c^n$，$m$ 模 q 指数为 4，n 模 q 指数为 $p\rangle$，$q=4p+1$；

$G_{60}=H_3\times C_4$，其中 $H_3=\langle a, b \mid a^p=b^q=1, a^{-1}ba=b^r$，$r$ 模 q 指数为 $p\rangle$，$q=4p+1$；

$G_{61}=H_1\times C_3$，其中 H_1 同 G_{56}；

$G_{62}=H_2\times C_3$，其中 H_2 同 G_{57}；

$G_{63}=H_3\times C_3$，其中 H_3 同 G_{60}；

$G_{64}=H_4\times C_3$，其中 H_4 同 G_{58}；

$G_{65}=H_5\times C_3$，其中 $H_5=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1=[a, b], a^{-1}ca=c^m, b^{-1}cb=c^n$，$m$ 模 q 指数为 2，n 模 q 指数为 $p\rangle$，$q=2p+1$；

$G_{66}=H_6\times C_3$，其中 H_6 同 G_{59}；

$G_{67}=H_7\times C_3$，其中 $H_7=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r$，$r$ 模 q 指数为 $p\rangle$，$q=2p+1$；

$G_{68}=H_8\times C_4$，其中 $H_8\cong D_{2q}$，$q=2p+1$；

$G_{69}=H_8\times C_5$，其中 H_8 同 G_{68}；

$G_{70}=H_9\times C_4$，其中 $H_9=\langle a, b \mid a^{2p}=b^q=1, a^{-1}ba=b^r$，$r$ 模 q 指数为 $2p\rangle$，$q=2p+1$；

$G_{71}=H_9\times C_5$，其中 H_9 同 G_{70}；

$G_{72}=H_{10}\times C_5$，其中 $H_{10}=\langle a, b \mid a^p=b^q=1, a^{-1}ba=b^r$，$r$ 模 q 指数为 $p\rangle$，$q=2p+1$；

$G_{73}=H_{10}\times C_8$，其中 H_{10} 同 G_{72}；

$G_{74}=H_{10}\times C_3\times C_4$，其中 H_{10} 同 G_{72}；

$G_{75}=H_{11}\times C_{2q+1}$，其中 $H_{11}=\langle a,\ b\mid a^5=b^4=1,\ b^{-1}ab=a^k,\ k^2\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ q)\rangle$；

$G_{76}=H_{12}\times C_{2q+1}$，其中 $H_{12}\cong D_{10}$.

证　将此定理分两种情形来证明.

情形 1　G 无非平凡交换直因子.

不妨设 $G=RPQ$，其中 $R\in \mathrm{Syl}_2(G)$，$P\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$，则 R 交换. 由于 G 有 Sylow 塔，即 $Q\trianglelefteq G$，$PQ\trianglelefteq G$.

1）P,Q 都交换.

因为 $|Q/Z(Q)|\ \big|\ q$，所以 $Q/Z(Q)$ 循环，从而 Q 交换. 同理可得 P 交换.

2）$|Q|\ \big|\ q$，$|P|\ \big|\ p$.

因为 Q 交换，所以 $Q=C_Q(RP)\times[RP,\ Q]$，则 $G=RP[RP,\ Q]\times C_Q(RP)$，从而 $C_Q(RP)=1$，则 $|Z(G)|_q=1$，所以 $|Q|\ \big|\ q$.

由 P 交换得 $P=C_P(R)\times[R,\ P]$，从而 $|[R,\ P]|\ \big|\ |P/P\cap Z(G)|$，故 $|[R,\ P]|\ \big|\ p$. 当$[R,\ P]=1$ 时 $RQ\trianglelefteq G$，$G/RQ\cong P$，则 $G'\leqslant RQ$. 若 $P\cap Z(G)\neq 1$，由文献[14]得 $p\ \big|\ |A_c(G)|$. 由于 $P\not\leqslant Z(G)$，则 $p\ \big|\ |I(G)|$，从而 $p\ \big|\ |Z(I(G))|$. 取 $Z(I(G))$ 中的 p 阶元 $\bar{u}$（$\bar{u}$ 是由 P 中的元 u 诱导的 G 的自同构），则 u 平凡作用在 $RQ/(RQ\cap Z(G))$ 和 $RQ\cap Z(G)$ 上，从而 u 平凡作用在 RQ 上. 又由 P 交换得 $u\in Z(G)$，与 $\bar{u}$ 为 p 阶元矛盾. 因此 $P\cap Z(G)=1$，则 $|P|\ \big|\ p$. 当 $|[R,\ P]|=p$ 时，$P\cap Z(G)=C_P(R)$，故

$$G=C_P(R)\times[R,\ P]RQ$$

则 $C_p(R)=1$，因此 $|P|=p$.

3）$|Z(I(G))|_2=1$.

否则取 $Z(I(G))$ 中的 2 阶元 $\bar{u}$（$\bar{u}$ 是由 R 中的元 u 诱导的 G 的自同构），同上可得 $u\in Z(G)$，与 $\bar{u}$ 为 2 阶元矛盾. 因此 $|Z(I(G))|_2=1$.

4）$|Q|=q$.

若 $|Q|\neq q$，则 $G=RP$，于是 $|G/Z(G)|\ \big|\ 8p$，由 G 非幂零得 $|I(G)|$ 等于 $2p$,$4p$ 或 $8p$.

因为 $G/P\cong R$，故 $G'\leqslant P$，而 $G'\neq 1$，则 $G'=P$. 从而 $G/G'\cong R$.

(i) 若 $Z(G)\neq 1$，则 $2\ \big|\ (|G/G'|,\ |Z(G)|)$，由文献[3]得 $2\ \big|\ |A_c(G)|$，则 $|A_c(G)|_2$ 等于 2,4,8.

当 $|A_c(G)|_2=8$ 时，因为 $|A_c(G)\cdot I(G)|_2\ \big|\ 8$ 且 $|Z(I(G))|_2=1$，所以 $2\nmid |I(G)|$，矛盾.

当 $|A_c(G)|_2=4$ 时，同上可得 $|I(G)|=2p$. 若 R 不循环，由文献[4]得 $4=\prod\limits_{j=1}^{k}|Z_{2,j}|^{r_j}$，由于 $Z(G)\neq 1$，因此 R 是两个循环群的直积且 $|Z(G)|=2$，则 R 是 4 阶初等交换群，从而 $G=Z(G)\times D$（$D\leqslant R$ 且 $|D|=2$），那么 $G=Z(G)\times DP$，矛盾. 因此 R 循环，从而由文献[4]得 $|Z(G)|=4$，则 $|R|=8$，那么

$$G=\langle a,\ b\mid a^8=b^p=1,\ a^{-1}ba=b^r,\ r\ 模\ p\ 的指数为\ 2\rangle$$

由文献[5]得 $|A(G)|=4p(p-1)\neq 8pq$，矛盾.

当 $|A_c(G)|_2=2$ 时，同上可得 $|I(G)|$ 等于 $2p$ 或 $4p$. 又由文献[4]得 $2=\prod\limits_{j=1}^{k}|Z_{2,j}|^{r_j}$，同上可得 R 循环且 $|Z(G)|=2$，则 $|R|$ 等于 4 或 8. 设 $R=\langle a\rangle$，则

$$G=\langle a,\ b\mid a^4=b^p=1,\ a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$$

或

$$G=\langle a,\ b\mid a^8=b^p=1,\ a^{-1}ba=b^r,\ r\ 模\ p\ 的指数为\ 4\rangle$$

由文献[5]得上述两种情况都有 $|A(G)|=2p(p-1)\neq 8pq$，矛盾.

(ii) 若 $Z(G)=1$，则 $|R|\,\big|\,8$，从而 $|G|\,\big|\,8p$.

若 $|G|=8p$，由文献[6]知

$$G=\langle a,g \mid a^{p}=g^{8}=1,\ g^{-1}ag=a^{r},\ r\ \text{模}\ p\ \text{的指数为}\ 8\rangle$$

且 $p\equiv 1\ (\bmod\ 8)$. 由文献[5]可得 $|A(G)|=p(p-1)\neq 8pq$，矛盾.

若 $|G|=4p$，由文献[6]知

$$G=\langle c,b \mid c^{4}=b^{p}=1,\ c^{-1}bc=b^{r},\ r\ \text{模}\ p\ \text{的指数为}\ 4\rangle$$

且 $p\equiv 1\ (\bmod\ 4)$. 由文献[5]可得 $|A(G)|=p(p-1)\neq 8pq$，矛盾.

若 $|G|=2p$，则 $G\cong D_{2p}$，而此时 $|A(G)|=p(p-1)\neq 8pq$，矛盾.

5) 当 $R=1$ 时，$G\cong G_{39}$.

$G=PQ$. 由 G 非幂零得 $G\cong [C_q]C_p$. 故 $|A(G)|=q(q-1)$，从而 $q=8p+1$. 所以 $G\cong G_{39}$.

6) 当 $P=1$ 时，$G\cong G_i$ $(40\leqslant i\leqslant 45)$.

由于 $G=RQ$. 同 4) 的证明过程可得

$$G=\langle a,b \mid a^{8}=b^{q}=1,\ a^{-1}ba=b^{r},\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ 2\rangle$$

或

$$G=\langle a,b \mid a^{4}=b^{q}=1,\ a^{-1}ba=b^{-1}\rangle$$

或

$$G=\langle a,b \mid a^{8}=b^{q}=1,\ a^{-1}ba=b^{r},\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ 4\rangle$$

或

$$G=\langle a,g \mid a^{q}=g^{8}=1,\ g^{-1}ag=a^{r},\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ 8\rangle \qquad q\equiv 1\ (\bmod\ 8)$$

或

$$G=\langle c,b \mid c^{4}=b^{q}=1,\ c^{-1}bc=b^{r},\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ 4\rangle \qquad q\equiv 1\ (\bmod\ 4)$$

或 $G=D_{2q}$.

上述群的自同构群的阶依次为：$4q(q-1)$, $2q(q-1)$, $2q(q-1)$, $q(q-1)$, $q(q-1)$, $q(q-1)$，故 6) 成立.

7) 当 P,R 都不为 1 时，$G\cong G_i$ $(46\leqslant i\leqslant 55)$.

(i) 当 $[P,R]=1$ 时，$[P,Q]\neq 1$. 令 $A=RP$，则 A 交换. 由 $G/Q\cong A$ 得 $G'=Q$，则 $G/G'\cong R\times P$.

当 $Z(G)\neq 1$ 时，$2\,\big|\,(|Z(G)|,|G/G'|)$，从而 $2\,\big|\,|A_c(G)|$，则 $|A_c(G)|_2\in\{2,4\}$.

当 $|A(G)|_2=4$ 时，同 4) 的证明过程可得 $|Z(G)|=4$ 且 R 为 8 阶循环群. 因此

$$G=\langle a,b,c \mid a^{8}=b^{p}=c^{q}=1=[a,b],\ a^{-1}ca=c^{-1},\ b^{-1}cb=c^{r},\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ p\rangle$$

经计算，$|A(G)|=4q(q-1)$，得 $G\cong G_{46}$.

当 $|A(G)|_2=2$ 时，同 4) 的证明过程可得 $|Z(G)|=2$，R 为 4 或 8 阶循环群.

因此

$$G=\langle a,b,c \mid a^{4}=b^{p}=c^{q}=1=[a,b],\ a^{-1}ca=c^{-1},\ b^{-1}cb=c^{r},\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ p\rangle$$

或者

$$G=\langle a,b,c \mid a^{8}=b^{p}=c^{q}=1=[a,b],\ a^{-1}ca=c^{t},\ b^{-1}cb=c^{r},\ t\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ 4,\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ p\rangle$$

经计算，$|A(G)|=2q(q-1)$，得 $G\cong G_{47}$ 或 $G\cong G_{48}$.

当 $Z(G)=1$ 时，对 $\forall\, 1\neq x\in A$，x 无不动点的作用在 Q 上，又由 R 交换得 R 循环. 因此

$$G=\langle a,b,c \mid a^{2}=b^{p}=c^{q}=1=[a,b],\ a^{-1}ca=c^{-1},\ b^{-1}cb=c^{r},\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ p\rangle$$

或者

$$G=\langle a,b,c \mid a^{4}=b^{p}=c^{q}=1=[a,b],\ a^{-1}ca=c^{t},\ b^{-1}cb=c^{r},\ t\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ 4,\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ p\rangle$$

或者

$$G=\langle a,b,c \mid a^{8}=b^{p}=c^{q}=1=[a,b],\ a^{-1}ca=c^{t},\ b^{-1}cb=c^{r},\ t\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ 8,\ r\ \text{模}\ q\ \text{的指数为}\ p\rangle$$

经计算，$|A(G)|=q(q-1)$，得 G 同构于 G_{49}, G_{50} 或 G_{51}.

(ii) 当 $[P, R] \neq 1$ 时，$P \cong C_p$ 且 $Z(G) \leqslant R$. 由于交换群 $Q \trianglelefteq G$，则由文献[3]得 $(q-1) \mid 8pq$，则 $q-1$ 等于 $2p, 4p, 8p$.

若 $q-1=8p$，则 $A(G)$ 有 $8p$ 阶的自同构，于是 $RPZ(G)/Z(G)$ 循环，故 RP 交换，矛盾.

当 $q-1=2p$ 时，由 $G/C_G(Q) \lesssim A(Q)$，得 $|G/C_G(Q)|=2p$. 故存在 $S \lessdot R$，使得 $C_G(Q)=S \times Q$，由 $Q \trianglelefteq G$ 得 $[S, P]=1$，从而 $S \leqslant Z(G)$，则 $|R/Z(G)|=2$. 若 $Z(G) \neq 1$，则 $2 \mid |A_c(G)|$. 从而 $|A_c(G)|$ 等于 2,4. 同上可得

$$G=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r, r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p\rangle$$

或

$$G=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r, r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p\rangle$$

若 $Z(G)=1$，则 $|R|=2$. 此时

$$G=\langle a, b, c \mid a^2=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r, r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p\rangle$$

经计算，这 3 个群的自同构群的阶分别为 $2q(q-1)$，$4q(q-1)$，$q(q-1)$，得 $G \cong G_{52}$.

当 $q-1=4p$ 时，有 $G/C_G(Q) \lesssim A(Q)$. 又由 $[R, P] \neq 1$ 得 $|G/C_G(Q)|$ 等于 $2p, 4p$.

当 $|G/C_G(Q)|=2p$ 时，同上可得

$$G=\langle a, b, c \mid a^4=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r, r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p\rangle$$

或

$$G=\langle a, b, c \mid a^8=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r, r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p\rangle$$

或

$$G=\langle a, b, c \mid a^2=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^{-1}, a^{-1}ca=c^{-1}, b^{-1}cb=c^r, r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p\rangle$$

由 $|A(G)|=8pq$ 及 $q-1=4p$ 得 $G \cong G_{53}$.

当 $|G/C_G(Q)|=4p$ 时，$C_G(Q)=S \times Q$，S 为 R 的指数为 4 的子群. 故 $S \leqslant Z(G)$，且 $|R/Z(G)|=4$.

当 $Z(G) \neq 1$ 时，由 $|\mathrm{Inn}(G)|_2=|R/Z(G)|$ 得 $|A_c(G)|_2=2$，则 $|Z(G)|=2$ 且 $R \cong C_8$. 故

$$G=\left\langle a, b, c \,\middle|\, \begin{array}{l} a^8=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^m, a^{-1}ca=c^t, b^{-1}cb=c^r, m \text{ 模 } p \text{ 的指数为 2 或 4,} \\ t \text{ 模 } q \text{ 的指数为 4, } r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p \end{array}\right\rangle$$

经计算得 $|A(G)|=2q(q-1)$，因此 $G \cong G_{54}$ 或 $G \cong G_{55}$.

当 $Z(G)=1$ 时，$|R|=4$. 由 $|R/C_R(Q)|=4$ 得 $C_R(Q)=1$，从而 R 循环. 故

$$G=\left\langle a, b, c \,\middle|\, \begin{array}{l} a^4=b^p=c^q=1, a^{-1}ba=b^m, a^{-1}ca=c^t, b^{-1}cb=c^r, m \text{ 模 } p \text{ 的指数为 2 或 4,} \\ t \text{ 模 } q \text{ 的指数为 4, } r \text{ 模 } q \text{ 的指数为 } p \end{array}\right\rangle$$

经计算，$|A(G)|=q(q-1)$. 而 $q=1+4p$，从而 $|A(G)|=4pq$，矛盾.

情形 2　G 有非平凡交换直因子.

可设 $G=H \times D$，其中 H 非幂零且无非平凡交换直因子，$1 \neq D$ 是交换群，那么

$$|A(H)| \cdot |A(D)| \mid 8pq$$

由文献[2]得 $|A(H)| \in \{8pq, 4pq, 2pq, 4p, 4q, 2p, 2q\}$.

(i) 当 $|A(H)|=8pq$ 时，$D \cong C_2$. H 为情形 1 中的 17 种群. 经直接计算可知 $|A(H \times D)| \neq 8pq$.

(ii) 当 $|A(H)|=4pq$ 时，D 同构于 C_2, C_3 或 C_4. 由文献[7]可知 H 有 7 种可能，由 $|A(H \times D)|=8pq$ 可得 $G \cong G_i\,(56 \leqslant i \leqslant 67)$.

(iii) 当 $|A(H)|=2pq$ 时，$D \in \{C_2, C_3, C_4, C_5, C_8, C_3 \times C_4\}$. 由文献[5]可知 H 有 3 种可能，从而可得 $G \cong G_i\,(68 \leqslant i \leqslant 74)$.

(iv) 当 $|A(H)|=4p$ 时，$D \in \{C_2, C_3, C_4, C_{2q+1}, C_2 \times C_{2q+1}\}$. 由文献[5]可得 $G \cong G_i\,(75 \leqslant i \leqslant 76)$.

(v) 当 $|A(H)|$ 等于 $4q$，$2p$ 或 $2q$ 时，由文献[5]知，不存在满足条件的 H.

从证明过程中易知这 76 种群互不同构.

注　定理中条件“Sylow 2-子群交换”不能少，因为 Sylow 2-子群不交换的情况相当复杂.

定理 3 若 G 是自同构群阶为 $8pq$ 的有限单群，则 $G \cong A_5$.

证 由 G 是单群得 $Z(G)=1$，则 $G \cong \mathrm{Inn}(G)$，故 $|G| \mid 8pq$. 由 $|A(G)|=8pq$ 得 $G \cong A_5$.

本文作者衷心地感谢审稿老师提出的宝贵意见!

参考文献:

[1] DAVITT R M. On the Automorphism Group of a Finite p-Group with a Small Central Quotient [J]. Canadian Jorunal of Mathematics, 1980, 32(5): 1168-1176.

[2] 李世荣. 某些有限群的自同构群 [J]. 中国科学: A 辑, 1993, 36(12): 1276-1282.

[3] LI S R. Finite Groups with Automorphism Group of order 2^3p [J]. Proc Royal Irish Acad, 1994, 94A(2): 193-205.

[4] SANDERS P R. The Central Automorphism of a Finite Group [J]. Joural of the London Mathematical Societry, 1969, 44(1): 225-228.

[5] 陈贵云. 自同构群阶为 $p_1p_2\cdots p_n$ 或 pq^2 的有限群 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 1990, 15(1): 21-27.

[6] 张远达. 有限群构造 [M]. 北京: 科学出版社, 1982: 705.

[7] 杜 妮, 李世荣. 具有 $4pq$ 阶自同构群的有限群 [J]. 数学学报, 2004, 47(1): 181-188.

[8] 班桂宁, 张新政, 王 勇. p-群的自同构群的阶 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2005, 30(4): 600-604.

[9] 龚 律, 曹洪平, 恰有 7 个非正规子群的有限群 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2010, 32(2): 104-108.

[10] 胡接春, 陈贵云. 极大交换子群的阶对群的结构的影响 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2009, 31(10): 106-108.

One Kind of Group Whose Automorphism Groups Have Order $8pq$

XIA Qiao-zhen, CHEN Gui-yun, CAO Hong-ping

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: It is given that the precise structure of groups with Automorphism groups of order $8pq$, which are finite nilpotent or non-nilpotent groups with abelian Sylow 2-subgroup.

Key words: finite group; nilpotent group; automorphism group; Sylow subgroup

责任编辑 覃吉康