第 36 卷　第 1 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2011 年 2 月
Vol. 36　No. 1　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb.　2011

文章编号:1000－5471(2011)01－0006－04

一些特殊子群对有限群可解性的影响①

陈瑞芳，　曹洪平，　陈贵云

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要: 讨论了有限群的某些特殊子群与有限群可解性的关系，得到有限群可解的一些充分条件.

关　键　词: 幂零群；可解群；弱 c-正规子群；共轭置换子群

中图分类号: O152.1　　**文献标志码:** A

在群论中，人们常常利用子群的性质研究群的结构. 1997 年，文献[1]引进了共轭置换子群的概念. 2002 年，文献[2]给出了弱 c-正规子群的概念. 文献[3－9]通过对有限群的弱 c-正规子群或共轭置换子群进行研究，得到了有限群幂零、超可解和可解的充分条件. 本文继续对具有这种性质的子群进行研究，得到了有限群可解的一些充分条件.

本文中的群均为有限群. $M \lessdot G$ 表示 M 为 G 之极大子群，$\pi(G)$ 表示 G 的阶的素因子集合，其他未说明的符号都是标准的.

1　弱 c-正规子群与有限群的可解性

本节对有限群的弱 c-正规子群进行研究.

定理 1　设 G 为群，H 为 G 之 Sylow 子群，$(N_G(H))_G \neq 1$，且 $N_G(H)$ 之所有极大子群在 G 中弱 c-正规，则 G 可解.

证　由文献[2]之引理 3 及引理 1 知，$N_G(H)$ 可解.

若 $H \trianglelefteq G$，则 $N_G(H)=G$，从而 G 可解.

下设 $1 < N_G(H) < G$，由文献[10]之第 Ⅱ 章命题 2.5 知 $N_G(N_G(H))=N_G(H)$，从而 $N_G(H)$ 不正规于 G.

以下对 $|G|$ 进行归纳.

设 $M=N_G(H)$. 则由假设条件 $(N_G(H))_G \neq 1$ 有 $1 < M_G \trianglelefteq G$.

考虑 $\overline{G}=G/M_G$.

由文献[10]第 Ⅱ 章命题 2.3 知 HM_G/M_G 为 $\overline{G}$ 之 Sylow 子群，且

$$N_{G/M_G}(HM_G/M_G)=N_G(H)M_G/M_G$$

又 M/M_G 之所有极大子群为 M_1/M_G，其中 $M_G \leqslant M_1 \lessdot M$. 由条件，$M_1$ 在 G 中弱 c-正规. 又由文献[2]之引理 1 知，M_1/M_G 在 $\overline{G}$ 中弱 c-正规. 由归纳假设，$\overline{G}$ 可解. 又由 M 可解知 M_G 可解，从而 G 可解.

定理 2　设 G 为群，存在 $M \leqslant G$，$|G:M|=p$，p 为素数. 若 M 之所有 Sylow 子群在 G 中弱 c-正规，

---

①　收稿日期：2010－03－03
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771172).
作者简介：陈瑞芳(1986－)，女，河南新乡人，硕士研究生，主要从事有限群的研究.
通信作者：曹洪平，副教授.

则 G 可解.

证　由文献[2]之引理 1 及定理 2 知 M 可解.

1) $p=2$ 时，$|G:M|=2$，从而 $M\trianglelefteq G$，且 $|G/M|=2$，从而 G/M 可解. 又因为 M 可解，所以 G 可解.

2) $p\neq 2$ 时，M 之 Sylow 2- 子群均为 G 之 Sylow 2- 子群，由条件及文献[2]之定理 2 知 G 可解.

注 1　该定理中“M 之所有 Sylow 子群在 G 中弱 c-正规”这一条件不可缺少. 比如：令 $G=A_5$，$M=A_4$ 分别为 5 阶和 4 阶交错群，则 $|G:M|=5$. 令 $H\in \mathrm{Syl}_2(M)$，易知 H 在 G 中不弱 c-正规，但 G 不可解.

定理 3　设 G 为群，$P\in \mathrm{Syl}_2(G)$，若存在 $P_1\lessdot P$，P_1 在 G 中弱 c-正规，则 G 可解.

证　若 $P_1=1$，则 $|G|=2n$，n 为奇数. 从而 G 可解.

以下设 $P_1\neq 1$. 由条件，P_1 在 G 中弱 c-正规，从而存在 $K\trianglelefteq\trianglelefteq G$，使得 $G=P_1K$，且 $P_1\cap K\leqslant (P_1)_G$.

1) 若 $(P_1)_G=1$，则 $|K|=2n$，n 为奇数，从而 K 可解.

取 $K_2\in \mathrm{Syl}_2(K)$，则 K_2 循环，故 K 为 2-幂零的. 设 K' 为 K 的正规 2-补，则 K' 也为 G 之 2-补，由 $K\trianglelefteq\trianglelefteq G$，得 $K'\trianglelefteq\trianglelefteq G$，从而 $K'\trianglelefteq G$，故 $|G/K'|$ 为 2 的方幂，从而 G/K' 可解. 又由 K' 可解得 G 可解.

2) 若 $(P_1)_G\neq 1$，考虑 $\overline{G}=G/(P_1)_G$. 易知 $\overline{G}$ 满足定理条件，从而由归纳假设知 $\overline{G}$ 可解. 又由 $(P_1)_G$ 可解得 G 可解.

注 2　该定理中“存在 $P_1\lessdot P$，P_1 在 G 中弱 c-正规”这一条件不可少. 比如令 $G=A_5$，$P\in \mathrm{Syl}_2(G)$，P 之所有极大子群均在 G 中不弱 c-正规，但 G 不可解.

定理 4　设 G 为偶阶群，H 为 G 之 Hall π-子群，$2\in\pi$，$|\pi|=2$. 若 H 在 G 中弱 c-正规，则 G 可解.

证　由 H 在 G 中弱 c-正规知存在 G 的次正规子群 K，使得 $G=HK$，且 $H\cap K\leqslant H_G$.

1) 若 $H_G=1$，则 K 为 G 之 Hall π'-子群. 又由 K 为 G 的次正规子群知 $K\trianglelefteq G$. $G/K\cong H$，且

$$|\pi(G/K)|=|\pi(H)|=2$$

从而 G/K 可解. 又因为 K 为奇阶群，所以 K 可解，故 G 可解.

2) 若 $H_G\neq 1$，考虑 $\overline{G}=G/H_G$.

(a) 若 H_G 含有 G 的 Sylow 2-子群，则 $\overline{G}$ 为奇阶群，从而 $\overline{G}$ 可解.

(b) 若 H_G 不包含 G 的 Sylow 2-子群，则 H/H_G 为 G/H_G 的 Hall π-子群，$2\in\pi$. 若 $|\pi|=1$，则由文献[2]的定理 2 知 $\overline{G}$ 可解. 若 $|\pi|=2$，则易知 $\overline{G}$ 满足定理条件，从而由归纳假设知 $\overline{G}$ 可解. 又因为 $|\pi(H_G)|\leqslant|\pi(H)|$，所以 H_G 可解，故 G 可解.

注 3　该定理中“H 在 G 中弱 c-正规”这一条件不可少. 比如令 $G=A_5$，$G_2\in \mathrm{Syl}_2(G)$，$H=N_G(G_2)$. 则 $|H|=12$，H 为 G 之 Hall $\{2, 3\}$-子群，H 在 G 中不弱 c-正规，但 G 可解.

2　共轭置换子群与有限群的可解性

本节对有限群的共轭置换子群进行研究.

定理 5　设 G 为群，$M\lessdot G$，M 之所有 Sylow 子群在 G 中不正规. 若 M 的极大子群的 Sylow 子群在 G 中共轭置换，则 G 可解.

证　由条件，$\forall H\lessdot M$ 及 $P\in \mathrm{Syl}_p(H)$，$p\in\pi(G)$，有 P 在 M 中共轭置换，从而由文献[4]之定理 2.3 知，M 幂零，因此 M 可解. 若 $M\trianglelefteq G$，则 $\forall P\in \mathrm{Syl}_p(M)$，$P$ 为 M 的特征子群，故 $P\trianglelefteq G$，与条件矛盾.

以下考虑 M 不正规于 G.

1) 若 $|\pi(M)|=1$，由 $M\lessdot G$ 知 $M\in \mathrm{Syl}_p(G)$，$p\in\pi(G)$. 由条件，$\forall H\lessdot M$，H 在 G 中共轭置换，从而由文献[4]之引理 1.4 知，$H\trianglelefteq G$.

若 $H=1$，则 M 为素数 p 阶群，从而 $M\leqslant C_G(M)\leqslant N_G(M)<G$. 又由 $M\lessdot G$ 知 $N_G(M)=C_G(M)$，从而 G 有正规 p-补 L. 令 M 互素作用在 L 上，则 $\forall q\in\pi(L)$，L 有 M 不变的 Sylow q-子群 Q，由 $M\lessdot G$ 知 $G=MQ$，从而 $|\pi(G)|=2$，故 G 可解.

若 $H\neq 1$，则 $M/H\lessdot G/H$，且 M/H 的极大子群为 1，故 G/H 满足定理条件，由归纳假设知 G/H 可解，从而 G 可解.

2) $|\pi(G)|\geqslant 2$.

因 M 之所有 Sylow 子群在 G 中不正规，则对于 $\forall P\in \mathrm{Syl}_p(M)$，有 $p\in\pi(M)$. 由 $M\lessdot G$ 及 M 幂零知 $N_G(P)=M$.

以下证明 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$.

若 P 不为 G 的 Sylow 子群，则存在 $P_1\in \mathrm{Syl}_p(G)$，使得 $P<P_1$，于是

$$P<N_{P_1}(P)=N_G(P)\cap P_1=M\cap P_1=P$$

矛盾. 从而 M 为 G 之 Hall 子群. 由文献[12] 中 Ⅸ 章定理 3.4 知，存在 $N\trianglelefteq G$，使得 $G=MN$，$M\cap N=1$，$G/N\cong M$ 可解.

设 $\forall P\in \mathrm{Syl}_p(M)$，$p\in\pi(M)$，$P$ 互素作用在 N 上，则 $\forall q\in\pi(N)$，N 有 P 不变的 Sylow q-子群 Q，且任意两个 P 不变的 Sylow q-子群在 $C_N(P)$ 中共轭. 若 $C_N(P)\neq 1$，则 $N_G(P)>M$，矛盾. 从而 $C_N(P)=1$，即 N 有唯一的 P 不变的 Sylow q-子群 Q. $\forall m\in M$ 及 $x\in P$，$Q^{mx}=Q^{mxm^{-1}m}=Q^m$，从而 Q^m 为 P-不变的 Sylow q-子群，故 $Q^m=Q$. 从而 $G=MQ$，故 $Q=N$，因此 N 可解，从而 G 可解.

注 4 该定理中“M 的极大子群的 Sylow 子群在 G 中共轭置换”这一条件不可少. 比如：令 $G=A_5$，$M=N_G(G_3)$，$G_3\in \mathrm{Syl}_3 G$，则 $|M|=6$，$M\lessdot G$，M 之所有 Sylow 子群在 G 中不正规，$G_3\lessdot M$，但 G_3 在 G 中不共轭置换，G 不可解.

定理 6 设 G 为群，H 为 G 之幂零子群，$|G:H|=2n$，n 为奇数. 若 H 在 G 中共轭置换，则 G 可解.

证 因为 $H\leqslant H^G\leqslant G$，所以 $|G/H^G|\,\big|\,|G:H|$，于是 G/H^G 可解.

由 H 在 G 中共轭置换，有 $H^G=H^{g_1}\cdots H^{g_n}$，其中 $g_1,\cdots,g_n$ 为 $N_G(H)$ 在 G 中的陪集代表，故由 H 幂零及文献[11] 知 H^G 可解，从而 G 可解.

注 5 该定理中 “H 在 G 中共轭置换” 这一条件不可少，比如：令 $G=A_5$，H 为 G 之 2 阶子群，但 H 在 G 中不共轭置换，G 不可解.

定理 7 设 G 为群，H 为 G 之幂零子群，$|G:H|=n$，n 为奇数. 若 H 存在某个极大子群 M 在 G 中共轭置换，则 G 可解.

证 由 H 幂零且 M 为 H 之极大子群知，$|H:M|=p$，p 为素数.

若 $p=2$，则由 $|H:M|=2$ 知，$|G:M|=2n$，从而 $|G/M^G|\,\big|\,|G:M|$，故 G/M^G 可解. 由 M 幂零且在 G 中共轭置换及文献[11] 知 M^G 可解，从而 G 可解.

若 $p\neq 2$，则 $|G:M|=n'$，n' 为奇数. 又 $|G/M^G|\,\big|\,|G:M|$，故 G/M^G 可解. 由 M 幂零且在 G 中共轭置换及文献[11] 知 M^G 可解，从而 G 可解.

注 6 该定理中“H 存在某个极大子群 M 在 G 中共轭置换” 这一条件不可少，比如：令 $G=A_5$，$H\in \mathrm{Syl}_2(G)$，H 幂零，但 H 之所有极大子群在 G 中不共轭置换，G 不可解.

推论 1 设 G 为群，$H\leqslant G$，$|G:H|=n$，n 为奇数. 若 $N_G(H)$ 幂零且 $N_G(H)$ 之某个极大子群 M 在 G 中共轭置换，则 G 可解.

定理 8 设 G 为群，H 为 G 之极大的幂零子群，$N_G(H)\trianglelefteq\trianglelefteq G$. 若 H 包含 G 之某个 Sylow 2-子群或其极大子群，且 H 在 G 中共轭置换，则 G 可解.

证 首先证明 $N_G(N_G(H))=N_G(H)$.

任取 $g\in N_G(N_G(H))-N_G(H)$，则 $N_G(H^g)=N_G(H)^g=N_G(H)$，从而 $H^g\trianglelefteq N_G(H)$. 由 H 幂零知 H^g 幂零. 又由 H 在 G 中共轭置换知 $HH^g=H^gH$. 又因为 $H\trianglelefteq N_G(H)$，所以 HH^g 幂零. 由 H 的极大幂零性知 $HH^g=H$，从而 $g\in N_G(H)$，矛盾. 即证得 $N_G(N_G(H))=N_G(H)$.

由条件 $N_G(H)\trianglelefteq\trianglelefteq G$ 及文献[4] 之引理 1.10 知 $N_G(H)=G$，从而 $H\trianglelefteq G$.

由 H 包含 G 之某个 Sylow 2-子群或其极大子群知，$|G/H|=n$，n 为奇数，或 $|G/H|=2n'$，n' 为奇数，均有 G/H 可解，从而 G 可解.

本文作者衷心地感谢审稿老师提出的宝贵意见！

参考文献：

[1] FOGULE T. Conjugate-Permutable Subgroups [J]. J of Algebra，1997，191：235－239.

[2] 朱路进，缪　龙，张新建. 有限群的弱 c-正规 [J]. 扬州大学学报：自然科学版，2002，8(3)：8－10.

[3] 陈顺民，陈贵云. 共轭置换子群与有限群的可解性 [J]. 云南大学学报：自然科学版，2008，30(5)：443－447.

[4] 张勤海，赵俊英. 幂零群的若干等价条件 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2005，30(2)：26－30.

[5] 郭鹏飞. 共轭置换子群对有限群可解性的影响 [J]. 山西农业大学学报，2004，24(2)：187－188.

[6] 钟祥贵，郭静安，单俊辉，等. 共轭可置换子群对群结构的影响 [J]. 广西师范大学学报：自然科学版，2008，26(1)：38－41.

[7] 裴旭莲，钟祥贵. 共轭置换子群与群的幂零性 [J]. 广西师范大学学报：自然科学版，2007，25(3)：28－31.

[8] 刘　熠，钟纯真，李尚莹. 极小弱 c-正规子群对有限群结构的影响 [J]. 内江师范学院学报，2008，23(6)：16－18.

[9] 邵长国. 有限群可解的若干充分条件 [J]. 数学的实践与认识，2006，36(9)：299－302.

[10] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 2 版. 北京：科学出版社，1999：58－59.

[11] 贝. 胡佩特. 有限群论 [M]. 黄建华，李慧陵，译. 福州：福建人民出版社，2001：41.

[12] 徐明曜，黄建华，李慧陵，等. 有限群导引(下册) [M]. 北京：科学出版社，2001：72.

[13] 李芳芳，曹洪平. 子群的性质对有限群结构的影响 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(8)：5－8.

[14] 陈　露. 半群的 I-V Fuzzy 子半群 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，32(4)：93－96.

The Influence of Some Special Subgroups on the Solvable Property of Finite Groups

CHEN Rui-fang，　CAO Hong-ping，　CHEN Gui-yun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：This article mainly discussed the relationship between some special subgroups and the solvable property of finite groups，and obtained some sufficient conditions of solvable groups.

Key words：nilpotent groups；solvable groups；weakly c-normal subgroups；conjugate-permutable groups

责任编辑　覃吉康