文章编号:1000－5471(2012)04－0209－04

谈大学生创新能力的培养
——以泰勒定理的教学为例①

周中成，　李金富

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：创新能力是大学生最重要的能力之一，需要在教学中不断地培养. 以讲授泰勒定理为例谈谈如何培养大学生的创新能力. 认为培养大学生寻找问题、提出猜想的能力是很有效的途径.

关　键　词：泰勒定理；寻找问题；猜想能力；创新能力

中图分类号：G420　　　　文献标志码：A

创新教育已是高等教育的核心内容. 在高等数学教学过程中渗透创新能力的培养，是素质教育所必需的. 数学创新教育主要是要培养学生的发散思维能力，使他们能够发现问题、提出猜想，从而培养他们的创新能力. 关于如何培养学生的创新能力的问题，已经有很多作者从不同的角度探讨过(参见文献[1－6]). 当前，在数学教育中，对学生进行猜想能力的培养和训练仍然是薄弱的环节. 数学教学由于过分强调逻辑思维能力的培养，而忽视猜想能力的培养，使数学学习者对猜想不屑一顾或敬而远之，从而抑制了他们创造力的发挥. 在课堂教学中，很少有欧拉所提倡的"给学生寻点开心，让学生感到惊讶"的场景出现，数学被看成是种种"套路"，数学教学被看成是对数学结论的掌握，而非数学发现过程的再现. 实际上，数学往往更像是猜想游戏，数学教学必须为数学的再发现做准备，至少应该进行一些简单的尝试. 波利亚就曾向所有的数学教师大声呼吁："让我们教猜想吧". 由此可见数学猜想能力的重要性. 猜想可使我们跃过常规思维的步骤，直接感觉到那些未曾被发现过的东西. 数学猜想能力是一种具有多种成份的能力，它包含数学的想象力和直觉思维能力，也包含了对猜测部分和中间环节进行论证和反驳的逻辑思维能力等，需要通过全面的训练加以培养，这也是培养大学生创新能力的内容之一. 因此，对大学生进行数学猜想能力的培养，对于大学生当前和长远的发展都是很有好处的.

1　创新能力的培养

1.1　创新能力的培养途径

如何在高等数学教学中去培养大学生的创新能力呢？作者认为寻找问题、提出猜想是很有效的途径. 众所周知，微积分课程是重要的基础课程之一，它对后续课程学习的影响非常大，后续课程中许多重要定理、方法和思想基本上都来源于微积分课程. 与后续课程相比，微积分课程又是一门简单的学科，而往往越简单越重要，应用也越多. 因为简单的东西我们才能看得更清楚，也更容易提升和推广它们，因此，简单

① 收稿日期：2010－12－14
基金项目：西南大学本科实验教学改革行动计划项目.
作者简介：周中成(1978－)，男，四川广安人，讲师，博士，主要从事分布参数系统控制的研究.

的知识正是我们发现问题、分析问题、提升问题、形成猜想的重要源泉．正因为微积分课程的重要性，在教学过程中，在教学生学好这门课的同时，也要教他们在这门课的现有知识上去寻找问题的新的生长点，甚至可能是另一门学科(当然不用去讲另一门学科)，要告诉他们另一门学科的生长点就在此．如果剥去复杂学科、复杂知识神秘的外表，回到最原始的情形，学生们就能看得更清楚，这时就可以告诉他们，这就是微积分课程的知识了．

学会寻找问题、提出猜想是非常重要的．问题和猜想伴随着数学发展的整个过程，新理论的诞生也常常是解决某一重大猜想的结果，因此，问题非常重要，它推动数学一步步地向前发展，尽管现在将数学向前推进哪怕一点点都很困难，但是人们推进它发展的这一理想并没有停止，且一直在努力．

若自己能发现问题、提出猜想，对学习是非常有帮助的，因为有问题才能促使思考．讲授现有知识、提出猜想，对一般学生，可让他们开阔视野，对于学习能力有余的学生还可以试探性地去解决其中的某些猜想．不论简单还是复杂，只要用心去深入思考，就一定会有所收获，有所发现．

1.2 个人教学中的具体做法

如何去寻找问题、提出猜想呢？下面以作者在微积分课程教学中的例子来说明．

(1) 利用类比发现问题、提出猜想．

类比是从不同对象之间相同或相似的方面出发，发现它们在其他方面也具有相同或相似点的思维形式．从思维方式上看，它是从特殊到特殊的思维方式．一般来说，它遵循这样的思维过程，即：具体材料⟶类比⟶联想⟶推广⟶形成猜想．它是一种有效的发现问题、提出猜想的途径，通过类比就能看清楚两者的相似性，发现问题．比如，众所周知，泰勒定理[7]是微积分课程中最重要的基本定理之一，正是由于它的重要性，所以有些数学家曾说：“微积分就是泰勒定理”，有了泰勒定理，就基本上可以推出微积分课程中许多其他的重要定理了．那么我们自然要问，泰勒定理是如何被猜想发现的呢？我们换一个角度来简单地看这个定理．我们知道，理想状态很难在现实中找到，现实世界常常是理想状态的近似，但不可能是精确的，而常常近似的东西比精确的更重要．比如称重500克，我们常常称出的东西不是500克，而是在500克左右，越想准确，对称重的仪器要求越高，但还是永远不可能称得500克．我们可以做到越来越靠近真实值，且误差是我们人为来控制的，只是越近似需要的成本越高．由此类比得到启发，精确的量要用近似的量去逼近，而这种逼近是误差越小越好，且误差还可以控制．我们可以将此想法类比应用于研究函数．现实世界中大量自然与社会现象是用函数来描述的，而这些函数当然可以用其他函数来近似，那么，用什么函数类来近似呢？用简单函数，越简单的越好，而基本初等函数是最简单的了，在此函数类中既满足要求又很简单的是幂函数类．若选取幂函数类来近似，就猜想出了泰勒定理．通过这种近似关系，对某一函数的研究就转化为对此幂函数线性组合的研究．继续提出猜想，此幂函数类，能否找到正交多项式族来逼近函数呢？再对中心的个数进行猜想，若用中心在 a 点的多项式来逼近即猜得中心在 a 点的泰勒展开式，当然同一个多项式还可以写成具有多个中心的情况，甚至是无穷个中心的情况，类比可以提出函数能否展成具有两个或多个甚至是无穷个中心的泰勒级数呢[8]？函数能否在基本初等函数类中再找其他的函数类来逼近呢？考虑到现实中的一些周期现象，我们猜想用三角函数类来逼近周期函数，从而可猜想出傅里叶级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

那它能否写成 $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ 呢？ 再者，能否用 $\{\mathrm{e}^{nx}\}_{-\infty}^{+\infty}$ 指数函数族来逼近呢？展开成各种级数后，我们还可以来分析余项的形式，有积分型、微分型，那么是否还有其他形式的余项表达式呢？然后又可以类比猜想，多元函数的这些类似的问题又如何？一元向量值函数和多元向量值函数又如何呢？再接着可以猜想到抽象值函数的这些类似问题又是如何呢？通过类比我们发现了泰勒定理的很多问题．更进一步，在一元函数的微积分讲完之后，转到多元函数时，将要学习考虑些什么问题呢？这时就可以大胆地类比猜想多

元函数要研究的问题，然后再比较一元与多元微积分的异同点．再比如，有了对一元函数积分的深刻理解后，通过类比，就能很容易自己定义线积分、面积分、体积分、重积分等各种积分了．同时，学生们可以自己类比猜想出多元函数泰勒定理的形式，而有了多元函数泰勒定理后，多元函数分析中很多其他的问题就容易解决了．

（2）利用直觉发现问题、提出猜想．

简单地讲，直觉就是对事物直接的理解、领悟和认识．数学直觉则是指对数学对象或问题的直接的领悟和理解．它包含直观感觉、直观形式推导等，它是发现问题、提出猜想的重要方法，在问题发现中起着关键性的作用．许多大科学家对直觉都曾有精辟的论断．爱因斯坦曾说过："我信任直觉"．莱布尼茨曾说："直觉往往一眼看出在我们靠推理的力量花了许多时间精力以后才能找到的结论"．庞加莱认为："直觉就是创造力的基础"．数学上许多新的发现常常是源于很自然的想法，你最原始的想法很可能就被隐藏在复杂的逻辑推理之中了，看不清楚，而形式推导是承现你最自然、最原始想法的平台，将你如何这样想、为何这样想完整地承现出来．直觉和直观推导虽然是不严密的，有时得到的结论还可能是错的，但这也不能否定它的重要性，毕竟发现问题、提出猜想常常要比证明问题重要得多．比如，在讲授欧拉公式时，先要告诉大家欧拉公式是如何得来的，这就是靠直觉和形式推导发现的公式．一般情况下，指数函数的指数不能是复数，让学生直观地大胆地猜想指数若是复数可不可以？类比对 e^{ix} 作直观形式的泰勒展开，有 $e^{ix}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$，将实部与虚部合并即得

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

同理有

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

由此可猜得欧拉公式

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\qquad \sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$$

更进一步，这种直觉的形式推导可以大胆地应用于其他的地方．比如，将求解常微分方程的方法形式地应用于求解偏微分方程，还可以大胆地应用于如何定义各种偏微分方程的弱解，这样既直观，又好理解，最后再用严密的方法来证明结论就可以了．再比如，我们用直观性还可以定义极限、积分和级数和等．

提出的猜想越多越好，因为猜想的结论中有许多内在的联系，一个猜想的解决可能会导致相关猜想的解决．常常在众多的猜想中，有时可能构建起相关理论的框架，一旦解决，某一理论或某一学科即可产生．猜想的结论有时又能建立起某一理论与其它理论的内在联系，能更清楚地认清各理论的内在关系，搭建起各学科之间的桥梁．数学的发展过程就是提出猜想与求解的过程，这一过程使数学理论由低级向高级发展，这也符合数学发展的规律．比如，由算术到代数，再到线性代数与近世代数，由平面几何到立体几何，再到解析几何，再到微分几何等，理论一步步地得到提升，数学理论也就由低级一步步地走向了高级[9]．

2　结论及建议

当然，发现问题、提出猜想的手段远非上述两种．在发现问题、提出猜想的过程中，各种手段都会用上，它们互为补充，这样才能更高效地发现问题、提出猜想．在将来的教学中，要更多地启发学生自己去发现问题、提出猜想，不论提出猜想的大与小、对与错，能大胆提出猜想本身就是一种创新，再尝试着去解决它，这个过程更进一步培养了他们的创新能力．学会发现问题、提出猜想后，自然地还要学会提出好的猜想．好的猜想，可以让无数的数学家前仆后继地去攻克它，推动数学的发展；而不好的猜想，意义不大，没有人去关心它，甚至有的猜想自己提出后也不再去关心了．所以在选择数学问题要继续走下去的时候就还要认真地思考一下，研究哪些数学问题才能尽量避免走弯路，以便获得成功．大胆地去寻找问题、提出猜

想、提出好的猜想，逐步培养自己的创新能力，然后再运用创新能力去解决这些猜想.

参考文献：

[1] 钱从新. 运用推广与引申的方法培养学生的创新能力[J]. 数学教育学报，2003，12(1)：97－99.

[2] 罗新兵，罗增儒. 数学创新能力的涵义与评价[J]. 数学教育学报，2004，13(2)：82－84.

[3] 付　军，朱　宏，王宪昌. 在数学建模教学中培养学生创新能力的实践与思考[J]. 数学教育学报，2007，16(4)：93－95.

[4] 刑　磊. 高校教师应该知道的120个教学问题[M]. 北京：北京大学出版社，2010.

[5] 夏小刚，吕传汉，汪秉彝. 基于“提出问题”的数学教学实验研究[J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(2)：155－160.

[6] 王小利，张国洪. 高等数学教学效果影响因素之实证研究[J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(4)：148－150.

[7] 闵　兰，陈晓敏. 几个微分中值定理之异同[J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2009，34(6)：196－199.

[8] 桂祖华. 微积分新探[M]. 上海：上海交通大学出版社，2004.

[9] 吴文俊，龚　升.《简明微积分》读后感[J]. 高等数学研究，1999，2(3)：2－3.

Discussions on Developing Innovation Abilities for College Students
——Taking Teaching Taylor Theorem as an Example

ZHOU Zhong-cheng，　LI Jin-fu

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Innovation abilities are the most important abilities for college students，which need to be developed constantly during the process of teaching and training. The authors take teaching Taylor Theorem as an example to explain how to train the innovation abilities for students，which shows that training the abilities of searching issues and guessing are effective ways.

Key words：Taylor Theorem；searching issues；guessing ability；innovation ability

责任编辑　廖　坤