第 37 卷　第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2012 年 4 月
Vol. 37　No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr.　2012

文章编号:1000-5471(2012)04-0050-03

关于平面卵形区域的等周亏格上界估计的注记①

戴　勇

黔南民族师范学院 数学系，贵州 都匀 558000

摘要： 利用平面卵形线的 Gage's 定理及著名的等周不等式，给出欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中卵形区域的等周亏格的几个上界估计.

关 键 词： 等周不等式；等周亏格；曲率；卵形区域

中图分类号： O186.5　　　　**文献标志码：** A

众所周知：平面上固定长度的简单闭曲线中，圆所围成的面积最大. 即平面简单闭曲线 Γ 所围成区域的面积 A 与其周长 L 满足

$$L^2-4\pi A\geqslant 0$$

当且仅当 Γ 为圆时等号成立.

平面曲线 Γ 的重要几何量除了它的周长、所围成区域的面积外，还有它的曲率 κ. $\kappa>0$ 的平面简单闭曲线称为卵形线，由卵形线围成的平面区域称为卵形区域.

一般地，设 $\mathbf{R}^2$ 中闭区域 K 的面积为 A，∂K 的长度为 L，我们定义

$$\Delta(K)=L^2-4\pi A$$

为闭区域 K 的等周亏格. 等周亏格可以用来刻画周长为 L、面积为 A 的闭区域与圆盘的差别程度.

最经典的闭区域的等周亏格的上界估计应该是以下两个不等式(参见文献[1-5])：

1933 年，Bottema 得到的不等式：设 K 为 $\mathbf{R}^2$ 上的卵形区域，其曲率半径为 $\rho=\dfrac{1}{\kappa}$，κ 为 ∂K 的曲率，并设 $\rho_M=\max\{\rho\}$，$\rho_m=\min\{\rho\}$，则

$$L^2-4\pi A\leqslant \pi^2(\rho_M-\rho_m)^2$$

等号成立的充分必要条件是 $\rho_M=\rho_m$，即 K 为圆盘.

1955 年，Pleijel 得到一个更好的不等式：

$$L^2-4\pi A\leqslant \pi(4-\pi)(\rho_M-\rho_m)^2$$

等号成立的充分必要条件是 $\rho_M=\rho_m$，即 K 为圆盘.

几何不等式是几何学中一个非常重要的分支，很多几何学家用分析法及积分几何的方法研究几何不等式[1-5]，近几年来利用积分几何的办法，得到了一些新的等周亏格的上下界估计[6-14].

本文根据 Gage 定理[15-16]、著名的等周不等式

$$L^2-4\pi A\geqslant 0$$

以及文献[10-11]的包含测度思想，得到 $\mathbf{R}^2$ 中卵形区域的等周亏格的两个上界估计.

定理　设 Γ 为欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中长度为 L 的卵形线，Γ 围成一面积为 A 的卵形区域 K，设 s 为 Γ 的弧长

① 收稿日期：2010-12-01
基金项目：黔南民族师范学院科研项目资金(QNSY0906).
作者简介：戴　勇(1970-)，男，贵州安顺人，副教授，主要从事凸几何与几何不等式的研究.

参数，则

$$L^2-4\pi A\leqslant\frac{A^2}{\pi^2}\left(\left(\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s\right)^2-\frac{16\pi^4}{L^2}\right)$$

$$L^2-4\pi A\leqslant\frac{4L^2\pi^3}{A}\left(\frac{L^2}{16\pi^4}-\frac{1}{\left(\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s\right)^2}\right)$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

首先我们有以下引理：

引理[15]　设 Γ 为欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 中长度为 L 的卵形线，Γ 围成一面积为 A 的卵形区域 K，设 s 为 Γ 的弧长参数，则

$$\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s\geqslant\frac{\pi L}{A}$$

等号成立当且仅当 Γ 为圆.

定理的证明　由引理及著名的等周不等式

$$L^2-4\pi A\geqslant 0$$

可得如下不等式：

$$\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s\geqslant\frac{\pi L}{A}\geqslant\sqrt{\frac{4\pi^3}{A}}\geqslant\frac{4\pi^2}{L}\tag{1}$$

由不等式(1) 知

$$\left(\frac{\pi L}{A}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{4\pi^3}{A}}\right)^2\leqslant\left(\int_{\partial k}\kappa^2\mathrm{d}s\right)^2-\left(\frac{4\pi^2}{L}\right)^2$$

经化简整理，得

$$L^2-4\pi A\leqslant\frac{A^2}{\pi^2}\left(\left(\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s\right)^2-\frac{16\pi^4}{L^2}\right)$$

又由不等式(1) 可得

$$\frac{1}{\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s}\leqslant\frac{A}{\pi L}\leqslant\sqrt{\frac{A}{4\pi^3}}\leqslant\frac{L}{4\pi^2}$$

因此可得

$$\left(\sqrt{\frac{A}{4\pi^3}}\right)^2-\left(\frac{A}{\pi L}\right)^2\leqslant\left(\frac{L}{4\pi^2}\right)^2-\left(\frac{1}{\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s}\right)^2$$

即

$$L^2-4\pi A\leqslant\frac{4L^2\pi^3}{A}\left(\frac{L^2}{16\pi^4}-\frac{1}{(\int_{\partial K}\kappa^2\mathrm{d}s)^2}\right)$$

以上不等式中等号成立当且仅当 K 为圆盘. 证毕!

致谢：感谢西南大学数学与统计学院周家足教授的大力支持与帮助. 感谢博士生徐文学、曾春娜的讨论和指导.

参考文献：

[1]　BURAGO Y D, ZALGALLER V A. Geometric Inequalities [M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1988.

[2]　OSSERMAN R. Bonnesen-Style Isoperimetric Inequality [J]. Amer Math Monthly, 1979, 86: 1-29.

[3]　REN De-lin. Topics in Integral Geometry [M]. Singapore: Word Scientific, 1994.

[4]　ROS A. Compact Hypersurfase with Constant Scalar Curvature and a Congruence Theorem [J]. Diff Geom, 1988, 27(2): 215-220.

[5]　SANTALO L A. Integral Geometry and Geometric Probabiliy [M]. London: Addison-Wesley, 1976.

[6] DAI Yong, XU Wen-xue, ZHOU Jia-zu. Some Bonnesen Style Inequalities and Planar Isoperi1netric Deflcit Upper Limit [C]//Proceedings of the 14th International Workshop on Diff Geom. Korea: National Institute for Math Science, 2010: 69-76.

[7] YUE Shuang-san, XU Wen-xue, ZHOU Jia-zu. The Isoperimetric Deficit Upper Limit for the Convex Body in $\mathbf{R}^n$ [C]//Proceedings of the 14th International Workshop on Diff Geom. Korea: National Institute for Math Science, 2010: 77-85.

[8] ZHOU Jia-zu, CHEN Fang-wei. The Bonnesen-Type Inequalities in a Plane of Constant Curvature [J]. Journal of Korean Math Soc, 2007, 44(6): 1363-1372.

[9] LI Ming, ZHOU Jia-zu. An Upper Limit for the Isoperimetric Deficit of Convex Set of a Plan of Constant Curvature [J]. Science China Mathematics, 2010, 53(8): 1941-1946.

[10] 周家足. 平面 Bonnesen 型不等式 [J]. 数学学报: 中文版, 2007, 50(6): 1397-1402.

[11] 周家足, 任德麟. 从积分几何的观点看几何不等式 [J]. 数学物理学报, 2010, 30(5): 1322-1339.

[12] 马 磊, 马 芳, 周家足. 平面上非简单闭曲线的 Bonnesen 型不等式 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 36(3): 45-47.

[13] 马 芳, 周家足. 第二类完全椭圆积分的上界与下界估计 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2011, 33(4): 142-145.

[14] 周传婷, 周家足. 关于平面 Bonnesen 型不等式与第二类完全椭圆积分的注记 [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2011, 33(4): 145-148.

[15] GAGE M E. An Isoperimetric Inequality with Applications to Curve Shortening [J]. Duke Math, 1983, 50: 1225-1229.

[16] GREEN M, OSHER S. Steiner Polynomials, Wulff Flows, and Some New Isoperimetric Inequalityes for Convex Plane Curves [J]. Asian Math, 1999(3): 659-676.

Notes on the Isoperimetric Deficit Upper Bound of the Oval Domain

DAI Yong

Department of Mathematics, Qiannan Normal College for Nationalities, Duyun Guizhou 558000, China

Abstract: By the Gage' theorem of the oval and isoperimetric inequality, some isoperimetric deficit upper bounds of the oval domain in $\mathbf{R}^2$ are obtained.

Key words: isoperimetric inequality; isoperimetric deficit; curvature; oval domain

责任编辑 廖 坤