第 37 卷　第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2012 年 4 月
Vol. 37　No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr.　2012

文章编号:1000－5471(2012)04－0042－04

2－距离空间中两对非相容映象的一个新的公共不动点定理①

张军贺，　谷　峰

杭州师范大学 理学院，杭州 310036

摘要： 在 2－距离空间中，引入了(Ag) 型 R－弱交换映象的概念. 利用自映象对的非相容性和(Ag) 型 R－弱交换条件，建立了一类具有平方型的 φ-压缩条件，并在此基础上证明了 4 个映象的公共不动点的存在性和唯一性，得到了一个新的公共不动点定理.

关　键　词： 2－距离空间；非相容映象对；(Ag) 型 R－弱交换映象；公共不动点

中图分类号： O177.91　　　　**文献标志码：** A

自文献[1]引入 2－距离空间的概念以来，2－距离空间中的不动点理论已经取得了许多重要的研究成果[1-3]. 最近，文献[4]给出了一类平方型 φ-压缩映象的公共不动点定理，本文的目的是将其推广到 2－距离空间中. 我们在 2－距离空间中引进了(Ag) 型 R－弱交换映象的概念，利用自映象对的非相容性和(Ag) 型 R－弱交换条件，给出了 2－距离空间中的一个新的压缩型映象的公共不动点定理.

定义 1　2－距离空间(X, d)上的自映象对(f, g)称为是(Ag) 型 R－弱交换的，如果存在 $R>0$，使

$$d(ffx, gfx, a) \leqslant Rd(fx, gx, a) \qquad \forall x, a \in X$$

定义 2[5]　称函数 φ 满足条件 Φ，如果函数 φ: $[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ 是单调不减和右连续的，且 $\varphi(t)<t$ $(\forall t>0)$.

注 1　由定义 2 易知 $\varphi(0)=0$.

引理 1[5]　设函数 φ 满足条件 Φ，对 $\forall t \in [0, \infty)$，如果 $t \leqslant \varphi(t)$，则 $t=0$.

定理 1　设 S, T, A, B 是 2－距离空间 X 中的 4 个自映象，且满足以下条件：

(ⅰ) (S, A)与(T, B)是两对(Ag) 型 R－弱交换非相容映象对；

(ⅱ) $\overline{SX} \subset BX$，$\overline{TX} \subset AX$；

(ⅲ) 对 $\forall x, y, a \in X$，有

$$d^2(Sx, Ty, a) \leqslant$$
$$\varphi(\max\{d(Ax, By, a)d(Ax, Sx, a), d(Ax, Ty, a)d(By, Sx, a), d(Ax, By, a)d(By, Ty, a)\})$$

其中函数 φ 满足条件 Φ，则 S, T, A, B 在 X 中有唯一的公共不动点 x^*，且 x^* 是 S, T, A, B 的不连续点.

证　因(S, A)与(T, B)是 X 中的非相容映象对，故存在序列$\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = t_1 \in \overline{SX} \qquad \lim_{n\to\infty} Ty_n = \lim_{n\to\infty} By_n = t_2 \in \overline{TX} \tag{1}$$

---

①　收稿日期：2010－11－11

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10771141)；浙江省自然科学基金资助项目(Y605191).

作者简介：张军贺(1986－)，女，吉林长春人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：谷　峰，教授.

但是$\lim\limits_{n\to\infty} d(SAx_n, ASx_n, a)$与$\lim\limits_{n\to\infty} d(TBy_n, BTy_n, a)$或者不存在，或者存在但不等于 0，由于 $t_1 \in \overline{SX} \subset BX$，$t_2 \in \overline{TX} \subset AX$，所以存在 $u, v \in X$，使得

$$t_1 = Bu \qquad t_2 = Av \tag{2}$$

下面证明 Sv 是 S 与 A 的公共不动点，即 $Sv = SSv = ASv$.

事实上，由条件 (iii) 知，$\forall a \in X$，有

$$\begin{aligned} &d^2(Sv, Ty_n, a) \leqslant \\ &\varphi(\max\{d(Av, By_n, a)d(Av, Sv, a), d(Av, Ty_n, a)d(By_n, Sv, a), \\ &d(Av, By_n, a)d(By_n, Ty_n, a)\}) \end{aligned} \tag{3}$$

在(3)式两边令 $n \to \infty$，并注意到(1),(2)式和函数 φ 的不减性，得 $d^2(Sv, Av, a) \leqslant \varphi(0) = 0$，即

$$Sv = Av \tag{4}$$

由(S, A)是(Ag)型 R-弱交换非相容映象对，得 $d(SSv, ASv, a) \leqslant Rd(Sv, Av, a) = 0\ (\forall a \in X)$，即

$$SSv = ASv \tag{5}$$

由条件 (iii) 可知，$\forall a \in X$，有

$$\begin{aligned} d^2(SSv, Ty_n, a) \leqslant \varphi(\max\{&d(ASv, By_n, a)d(ASv, SSv, a), d(ASv, Ty_n, a)d(By_n, SSv, a), \\ &d(ASv, By_n, a)d(By_n, Ty_n, a)\}) \end{aligned} \tag{6}$$

在(6)式两边令 $n \to \infty$，并由(1),(2),(4),(5)式得

$$d^2(SSv, Av, a) \leqslant \varphi(d^2(SSv, Av, a)) \qquad \forall a \in X$$

从而由引理 1 可得 $d^2(SSv, Av, a) = 0\ (\forall a \in X)$，即

$$SSv = Av \tag{7}$$

所以从(4),(5),(7)式得

$$SSv = ASv = Av = Sv$$

即 Sv 是 S 与 A 的公共不动点.

下证 Sv 是 T, B 的公共不动点.

事实上，利用条件 (iii)，$\forall a \in X$，有

$$\begin{aligned} d^2(Sx_n, Ty_n, a) \leqslant \varphi(\max\{&d(Ax_n, By_n, a)d(Ax_n, Sx_n, a), d(Ax_n, Ty_n, a)d(By_n, Sx_n, a), \\ &d(Ax_n By_n, a)d(By_n, Ty_n, a)\}) \end{aligned} \tag{8}$$

在(8)式两边令 $n \to \infty$，并注意到(1),(2)式，得 $d^2(Bu, Av, a) \leqslant \varphi(d^2(Bu, Av, a))$. 从而由引理 1 可知 $d^2(Bu, Av, a) = 0\ (\forall a \in X)$，即

$$Bu = Av \tag{9}$$

又由条件 (iii) 知，$\forall a \in X$，有

$$\begin{aligned} d^2(Sv, Tu, a) \leqslant \varphi(\max\{&d(Av, Bu, a)d(Av, Sv, a), d(Av, Tu, a)d(Bu, Sv, a), \\ &d(Av, Bu, a)d(BU, Tu, a)\}) \end{aligned}$$

从(4),(9)式和函数 φ 的不减性得

$$d^2(Sv, Tu, a) \leqslant \varphi(0) \leqslant \varphi(d^2(Sv, Tu, a)) \qquad \forall a \in X$$

再由引理 1 得 $d^2(Sv, Tu, a) = 0\ (\forall a \in X)$，即

$$Sv = Tu \tag{10}$$

由(4),(9),(10)式可得 $Bu = Tu$，于是由(T, B)是(Ag)型 R-弱交换映象对可知

$$d(TTu, BTu, a) \leqslant Rd(Tu, Bu, a) = 0 \qquad \forall a \in X$$

进而 $TTu = BTu$，则由(10)式可得

$$TSv = BSv \tag{11}$$

由条件 (iii) 知，$\forall a \in X$，有

$$\begin{aligned} d^2(Sv, TSv, a) \leqslant \varphi(\max\{&d(Av, BSv, a)d(Av, Sv, a), d(Av, TSv, a)d(BSv, Sv, a), \\ &d(Av, BSv, a)d(BSv, TSv, a)\}) \end{aligned}$$

则由(4),(11)式可得

$$d^2(Sv, TSv, a) \leqslant \varphi(d^2(Sv, TSv, a)) \qquad \forall a \in X$$

从而由引理 1 得 $d^2(Sv, TSv, a)=0$ ($\forall a \in X$),即 $Sv=TSv=BSv$. 可见 Sv 也是 T 与 B 的公共不动点,因此令 $x^*=Sv(=Av=Bu=Tu=t_1=t_2)$,则 x^* 就是映象 S,T,A,B 的公共不动点.

下面证明 S,T,A,B 的公共不动点唯一.

事实上,假设 y^* 也是 S,T,A,B 的公共不动点,利用条件(iii),$\forall a \in X$,有

$$\begin{aligned} d^2(x^*, y^*, a) = & d^2(Sx^*, Ty^*, a) \leqslant \\ & \varphi(\max\{d(Ax^* By^*, a)d(Ax^*, Sy^*, a), d(Ax^* Ty^*, a)d(By^*, Sx^*, a), \\ & d(Ax^*, By^*, a)d(By^*, Ty^*, a)\}) = \varphi(d^2(Sx^*, Ty^*, a)) \end{aligned}$$

从而由引理 1 得 $d^2(Sx^*, Ty^*, a)=0$ ($\forall a \in X$),即 $x^*=y^*$,唯一性得证.

最后证明 x^* 是 S,T,A,B 的不连续点. 事实上,由(1)和(2)式得

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = t_1 = Bu = x^* \tag{12}$$

(1°)假设 S 在 x^* 处连续,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} SAx_n = \lim\limits_{n\to\infty} SSx_n = Sx^* = x^*$. 再由($S$, A)是(Ag)型 R-弱交换映象对得

$$d(SSx_n, ASx_n, a) \leqslant Rd(Sx_n, Ax_n, a) \qquad \forall a \in X \tag{13}$$

在(13)式两边令 $n \to \infty$,得 $\lim\limits_{n\to\infty} ASx_n = \lim\limits_{n\to\infty} SSx_n = x^*$,从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} d(SAx_n, ASx_n, a)=0$,这与 $\lim\limits_{n\to\infty} d(SAx_n, ASx_n, a)$ 或不存在,或存在但不等于 0 矛盾,故 S 在 x^* 处不连续.

(2°)假设 A 在 x^* 处连续,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} ASx_n = Ax^* = x^*$,因此由(12)和(13)式得

$$\lim_{n\to\infty} SSx_n = \lim_{n\to\infty} ASx_n = Ax^* = x^*$$

这与(1°)中所证 S 在 x^* 处不连续矛盾,故 A 在 x^* 处不连续.

利用(1)式所给出的序列$\{y_n\}$以及(T, B)是(Ag)型 R-弱交换映象对的条件同理可证:T,B 在 x^* 处不连续,至此定理 1 证完.

注 2 (1°)定理 1 把度量空间中的不动点定理相应地推广到 2-距离空间中,扩大了应用范围;

(2°)大多数不动点定理都要求空间是完备的,而定理 1 并不要求空间的完备性;

(3°)很多不动点定理都要求涉及到的映象具有某种连续性(或者要求至少有一个映象是连续的),而定理 1 中的映象都是不连续的. 可见定理 1 本质地改进了前人的已有结果.

定理 2 设(X, d)是 2-距离空间,$A,B,\{T_i\}_{i\in I}$(I 是指标集,I 的势不小于 2)分别是 X 上的自映象和自映象族. 若 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 满足以下条件:

(i) $\forall i \in I$,(T_i, A)和(T_i, B)都是(Ag)型 R-弱交换非相容映象对;

(ii) $\overline{T_iX} \subset BX$,$\overline{T_iX} \subset AX$ ($\forall i \in I$);

(iii) $\forall x,y,a \in X$,有

$$\begin{aligned} d^2(T_ix, T_jy, a) \leqslant \varphi(\max\{& d(Ax, By, a)d(Ax, T_ix, a), d(Ax, T_jy, a)d(By, T_ix, a), \\ & d(Ax, By, a)d(By, T_jy, a)\}) \end{aligned}$$

其中 $i,j \in I$,函数 φ 满足条件 Φ.

则 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 在 X 中有唯一的公共不动点,并且此公共不动点是 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 的不连续点.

证 对 $i,j,m \in I$,$i \neq j$,$i \neq m$,由定理 1 知 A,B,T_i,T_j 和 A,B,T_i,T_m 分别存在唯一的公共不动点 x_{ij} 和 x_{im},并且它们分别是映象 A,B,T_i,T_j 和 A,B,T_i,T_m 的不连续点,现在证明 $x_{ij}=x_{im}$. 事实上,根据条件(iii),$\forall a \in X$,有

$$\begin{aligned} d^2(x_{ij}, x_{im}, a) = & d^2(T_ix_{ij}, T_mx_{im}, a) \leqslant \\ & \varphi(\max\{d(Ax_{ij}, Bx_{im}, a)d(Ax_{ij}, T_ix_{ij}, a), d(Ax_{ij}, T_mx_{im}, a)d(Bx_{im}, T_ix_{ij}, a), \\ & d(Ax_{ij}, Bx_{im}, a)d(Bx_{im}, T_mx_{im}, a)\}) = \varphi(d^2(x_{ij}, x_{im}, a)) \end{aligned}$$

因此

$$d^2(x_{ij}, x_{im}, a) \leqslant \varphi(d^2(x_{ij}, x_{im}, a))$$

即

$$d^2(x_{ij}, x_{im}, a)=0 \qquad \forall a \in X$$

从而 $x_{ij}=x_{im}$. 再根据 i,j,m 的任意性可知，$A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 在 X 中有唯一的公共不动点，且此公共不动点是 $A,B,\{T_i\}_{i\in I}$ 的不连续点.

参考文献：

[1] GAHER S. 2-Metrische Raume Und Ihre Topologische Structure [J]. Math Nachr，1963，26(1－4)：115－148.

[2] 郑晓迪，邵　颖，张树义. 2-距离空间中一个新的公共不动点定理 [J]. 杭州师范大学学报：自然科学版，2008(2)：161－164.

[3] RHOADES B E. Contraction Type Mapping on a 2-Metric Space [J]. Math Nochr，1979，91：151－155.

[4] 何振华，谷　峰. 两对非相容映象的一个新的公共不动点定理 [J]. 宝鸡文理学院学报：自然科学版，2006，26(1)：7－9.

[5] 张石生，不动点理论及应用 [M]. 重庆：重庆出版社，1984.

[6] 巨小维，谷　峰. 关于渐近非扩张映象 Noor 迭代的进一步修正 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2008，33(3)：5－10.

[7] 李亚琼，谷　峰. 关于(Ag)型 φ-弱交换映象的公共不动点 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(8)：138－140.

[8] 周　敏. 距离空间中的一个公共不动点定理 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2008，33(5)：22－25.

A New Common Fixed Point Theorem for Two Pairs of Noncompatible Mappings in 2-Metric Spaces

ZHANG Jun-he，　GU　Feng

College of Science，Hangzhou Normal University，Hangzhou 310036，China

Abstract：In 2-metric spaces，the concept of (Ag) type R-weak commutative mapping is introduced. By using the noncompatible and (Ag) type R-weak commutative conditions of self-mapping pairs in 2-metric spaces，a class of twice power type φ-contractive condition is established and the existence and uniqueness of the common fixed point for four self-mappings on given conditions are discussed，a new common fixed theorems is obtained.

Key words：2-metric space；noncompatible mapping pairs；(Ag) type R-weak commutative mapping；common fixed point

责任编辑　廖　坤