文章编号:1000-5471(2012)04-0039-03

关于二阶 Hamilton 系统周期解唯一性的注记[①]

邢凯慧，　吴行平，　唐春雷

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：利用极小化作用原理得到二阶 Hamilton 系统周期解的存在性和唯一性.

关　键　词：Hamilton 系统；周期解；唯一性；极小化作用原理

中图分类号：**O176.3**　　**文献标志码**：**A**

本文研究 Hamilton 系统

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)=\nabla F(t,\ u(t)) & t\in[0,\ T]\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0\end{cases}\tag{1}$$

周期解的存在性和唯一性，其中 $T>0$，F：$\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N\longrightarrow\mathbf{R}$ 关于 t 是 T-周期的，而且满足下面的条件(A)：

(A) $F(t,\ x)$ 对每个 $x\in\mathbf{R}^N$ 关于 t 是可测的，对几乎处处的 $t\in[0,\ T]$ 关于 x 是可微的，且存在 $a\in C(\mathbf{R}_+,\ \mathbf{R}_+)$，$b\in L^1(0,\ T;\ \mathbf{R}_+)$，使得

$$|F(t,\ x)|\leqslant a(|x|)b(t)\qquad |\nabla F(t,\ x)|\leqslant a(|x|)b(t)$$

对所有的 $x\in\mathbf{R}^N$ 及几乎处处的 $t\in[0,\ T]$ 成立.

已经有很多学者得到了关于 Hamilton 系统周期解的结论(参见文献[1-4])，但很少有人得到系统(1)解的唯一性结果，只有文献[3]得到了这样的结果：

定理 A[3]　若条件(A)成立，而且存在 $f,g\in L^1(0,\ T;\ \mathbf{R}_+)$，$0<\alpha\leqslant1$ 和 $\beta>0$，满足下面的条件：

(F_1) 当 $x\neq y$ 时，对所有的 $t\in\mathbf{R}$，$x,y\in\mathbf{R}^N$ 都有 $(\nabla F(t,\ x)-\nabla F(t,\ y),\ x-y)>0$；

(F_2) $|\nabla F(t,\ x)|\leqslant f(t)|x|^{\alpha}+g(t)$；

(F_3) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2^{\alpha-1}\beta}{12}-C_0>0$；

(F_4) $\liminf\limits_{|x|\to\infty}\left[|x|^{-2\alpha}\int_0^T F(t,\ x)\mathrm{d}t-C_1\right]>0$ 对所有 $x\in\mathbf{R}^N$ 都成立.

其中

$$C_0=\begin{cases}0 & 0<\alpha<1\\ \dfrac{T}{6}\displaystyle\int_0^T f(t)\mathrm{d}t & \alpha=1\end{cases}\qquad C_1=\frac{2^{\alpha-1}T}{\beta}\left(\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

那么系统(1)在 H_T^1 中有唯一的 T-周期解.

定理 A 的条件比较复杂，本文在比定理 A 更简单的条件下，利用极小化作用原理同样得到了系统(1)周期解的唯一性结论，即下面的定理 1：

定理 1　若条件(A)和(F_1)成立，而且满足条件：

(F_5) 当 $|x|\to\infty$ 时，有 $\int_0^T F(t,\ x)\mathrm{d}t\to+\infty$ 成立.

---

① 收稿日期：2011-05-25

基金项目：国家自然科学基金项目(11071198).

作者简介：邢凯慧(1986-)，女，湖北黄冈人，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.

通信作者：唐春雷，教授.

那么系统(1) 在 H_T^1 中有唯一的 T-周期解.

注 1 本文从两个方面推广了定理 A. 一方面，去掉了条件(F_2),(F_3)；另一方面，条件(F_5)弱于条件(F_4). 此外，存在函数满足定理 1 的条件，但不满足定理 A 的条件. 例如

$$F(t, x) = \frac{1}{\pi^4 |x|^3} + \frac{\sin^2 t}{2} x_1 \qquad t \in [0, 2\pi], x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \mathbf{R}^N$$

若 u 是系统(1) 的 T-周期解当且仅当 u 是系统(1) 相应的作用泛函 φ 在 H_T^1 中的临界点，其中

$$H_T^1 = \{u: [0, T] \longrightarrow \mathbf{R}^N \mid u(t) \text{ 在} [0, T] \text{ 上绝对连续，且 } u(0) = u(T), \dot{u} \in L^2([0, T]; \mathbf{R}^N)\}$$

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T F(t, u(t))\mathrm{d}t$$

众所周知，H_T^1 在范数 $\|u\| = [\int_0^T |u(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \mathrm{d}t]^{\frac{1}{2}}$ 下是 Hilbert 空间，而且 φ 在 H_T^1 上是连续可微的. 更进一步，我们可以得到

$$\langle \varphi'(u), v \rangle = \int_0^T [(\dot{u}(t), \dot{v}(t)) + (\nabla F(t, u(t), v(t)))]\mathrm{d}t \qquad u, v \in H_T^1$$

对任意的 $u \in H_T^1$，令 $\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\mathrm{d}t$，$\tilde{u}(t) = u(t) - \bar{u}$，则有 Sobolev 不等式

$$\|\tilde{u}\|_\infty^2 \leqslant \frac{T}{12}\int_0^T |\dot{u}(t)|^2 \mathrm{d}t$$

由文献[1] 中的命题 1.3，存在常数 $C > 0$，使得

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leqslant C\|u\| \qquad u \in H_T^1 \tag{2}$$

令 $\widetilde{H}_T^1 = \{u \in H_T^1 \mid \bar{u} = 0\}$，我们很容易得到 $\widetilde{H}_T^1 \subset H_T^1$，而且 $H_T^1 = \mathbf{R}^N \oplus \widetilde{H}_T^1$.

定理 1 的证明

先证存在性. 由条件(F_1)，得

$$\begin{aligned} F(t, x) - F(t, y) = &\int_0^1 (\nabla F(t, y + s(x - y)), x - y)\mathrm{d}s = \\ &\int_0^1 \frac{1}{s}(\nabla F(t, y + s(x - y)) - \nabla F(t, y), s(x - y))\mathrm{d}s + \int_0^1 (\nabla F(t, y), x - y)\mathrm{d}s \geqslant \\ &\int_0^1 (\nabla F(t, y), x - y)\mathrm{d}s = (\nabla F(t, y), x - y) \end{aligned}$$

即对所有 $x, y \in \mathbf{R}^N$ 有

$$F(t, x) \geqslant F(t, y) + (\nabla F(t, y), x - y) \tag{3}$$

根据条件(F_5)，定义在 $\mathbf{R}^N$ 中的实函数 $x \longmapsto \int_0^T F(t, x)\mathrm{d}t$ 是强制的，则该函数有极小值. 设它在 $\bar{x}$ 处有极小值，于是

$$\int_0^T \nabla F(t, \bar{x})\mathrm{d}t = 0 \tag{4}$$

设 $\{u_k\}$ 是 φ 的极小化序列，由(3) 式和(4) 式，有

$$\begin{aligned} \varphi(u_k) \geqslant &\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T F(t, \bar{x})\mathrm{d}t + \int_0^T (\nabla F(t, \bar{x}), u_k(t) - \bar{x})\mathrm{d}t = \\ &\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T F(t, \bar{x})\mathrm{d}t + \int_0^T (\nabla F(t, \bar{x}), \tilde{u}_k(t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

利用 Sobolev 不等式，得

$$\begin{aligned} \varphi(u_k) \geqslant &\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 \mathrm{d}t + \int_0^T F(t, \bar{x})\mathrm{d}t - \left(\int_0^T |\nabla F(t, \bar{x})| \mathrm{d}t\right)\|\tilde{u}_k\|_\infty \geqslant \\ &\frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 \mathrm{d}t - C_1 - C_2\left(\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2 都是常数. 则存在常数 $C_3 > 0$，使得 $\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_3$. 由(2) 式，存在常数 $C_4 > 0$，使得

$$\|\tilde{u}_k\|_\infty \leqslant C_4 \tag{5}$$

由条件(F_1) 得

$$(\nabla F(t, y+\frac{1}{2}s(x-y)), x-y) \leqslant (\nabla F(t, y+s(x-y)), x-y) \qquad s \in [0, 1]$$

从而

$$\int_0^1 (\nabla F(t, y+\frac{1}{2}s(x-y)), \frac{1}{2}(x-y))\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (\nabla F(t, y+s(x-y)), x-y)\mathrm{d}s$$

即

$$F(t, \frac{1}{2}(x+y)) \leqslant \frac{1}{2}(F(t, x)+F(t, y))$$

于是

$$F(t, \frac{\bar{u}_k}{2}) = F(t, \frac{1}{2}(u_k(t)-\tilde{u}_k(t))) \leqslant \frac{1}{2}F(t, u_k(t)) + \frac{1}{2}F(t, -\tilde{u}_k(t))$$

对于几乎处处的 $t \in [0, T]$ 和 $k \in \mathbf{N}$ 成立，那么我们有

$$\varphi(u_k) \geqslant \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{u}_k(t)|^2 \mathrm{d}t + 2\int_0^T F(t, \frac{\bar{u}_k}{2})\mathrm{d}t - \int_0^T F(t, -\tilde{u}_k(t))\mathrm{d}t$$

利用(5)式，存在 $C_5 > 0$，使得 $\varphi(u_k) \geqslant 2\int_0^T F(t, \frac{\bar{u}_k}{2})\mathrm{d}t - C_5$．因此，由条件($F_5$)知$\{\bar{u}_k\}$是有界的．故 φ 的极小化序列$\{u_k\}$是有界的．根据极小化作用原理(见文献[1]的定理 1.1)，泛函 φ 有临界点．从而系统(1)有解．

下面证明周期解的唯一性．假设 u_1, u_2 是系统(1)的两个不同的 T-周期解，由条件(F_1)知

$$(\nabla F(t, u_1(t)) - F(t, u_2(t)), u_1(t)-u_2(t)) \geqslant 0$$

且严格不等号在 $[0, T]$ 的一个非零测度子集 E 上成立，于是$(\ddot{u}_1(t)-\ddot{u}_2(t), u_1(t)-u_2(t)) \geqslant 0$，且严格不等号在 E 上成立．从而

$$\int_0^T (\ddot{u}_1(t)-\ddot{u}_2(t), u_1(t)-u_2(t))\mathrm{d}t > 0$$

而

$$\int_0^T (\ddot{u}_1(t)-\ddot{u}_2(t), u_1(t)-u_2(t))\mathrm{d}t = -\int_0^T |\dot{u}_1(t)-\dot{u}_2(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant 0$$

矛盾．故系统(1)的解是唯一的．

参考文献：

[1] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[2] RABINOWITZ P H. Periodic Solutions of Hamiltonian Systems [J]. Comm Pure Appl Math, 1978, 31(2): 157－184.

[3] ZHANG Lie-hui, WANG Yong. A Note on Existence of a Unique Periodic Solution of Non-autonomous Second-order Hamiltonian Systems [J]. Journal of The Franklin Institute, 2010, 347: 781－794.

[4] WU Jun-fen, WU Xing-ping. Existence of Nontrival Periodic Solutions for a Class of Superquardic Second-order Hamiltionian System [J]. 西南大学学报：自然科学版, 2008, 30(4): 26－32.

Remarks on the Uniqueness for Periodic Solutions of Second Order Hamiltonian Systems

XING Kai-hui,　WU Xing-ping,　TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The purpose of this paper is to prove the existence and the uniqueness of periodic solution of second order non-autonomous Hamiltonian systems by using the least action principle.

Key words: Hamiltonian system; periodic solution; uniqueness; the least action principle

责任编辑　廖　坤