文章编号:1000-5471(2012)04-0029-05

图 $P_n \cup Z_{k+2}$ 的同谱等价类[①]

王　微

青海师范大学 数学与信息科学系，西宁 810008

摘要: 记 $\phi(G, \lambda)$ 是 G 的特征多项式. 利用图的特征多项式和谱半径以及 n 和 k 的关系分 3 种情况刻画出图 $P_n \cup Z_{k+2}$ 的所有同谱图.

关　键　词: 特征多项式; 同谱等价类; 同谱图

中图分类号: O157.6　　**文献标志码:** A

本文仅考虑有限、无向的简单图. 设图 G 是有 n 个顶点的连通图, G 的顶点数记作 $n(G)$, G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式叫做 G 的特征多项式, 记作 $\phi(G, \lambda)$ 或简记作 $\phi(G)$. n 个顶点的路记做 P_n. G 的谱就是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ 所构成的集合, 其中 λ_1 叫作图 G 的指标或谱半径, 记作 $\rho(G)$. 如果 $\phi(G, \lambda) = \phi(H, \lambda)$, 则称 G 和 H 同谱, 记作 $G \sim H$. 用 $[G]_\phi$ 表示 G 的同谱等价类, 即所有与图 G 同谱的图构成的集合. 对于任意的 $H \sim G$, 如果 $H \cong G$, 则称图 G 是由它的谱所决定的, 或称 G 是谱唯一的. 显然, G 是谱唯一的当且仅当 $[G]_\phi = \{G\}$.

目前对于谱唯一图和同谱图的研究可参见文献[1]. 文献[2]研究了谱半径小于 2 且没有路分支的图的谱刻画. 本文将研究 $P_n \cup Z_{k+2}$ 的同谱等价类.

1　基本引理

引理 1[3]　谱半径小于 2 的所有连通图为: P_n $(n \geqslant 1)$, Z_n $(n \geqslant 4)$, $T(a, b, c)$, 其中 $(a, b, c) \in \{(1, 2, 2), (1, 2, 3), (1, 2, 4)\}$, Z_n 和 $T(a, b, c)$ 如图 1 所示.

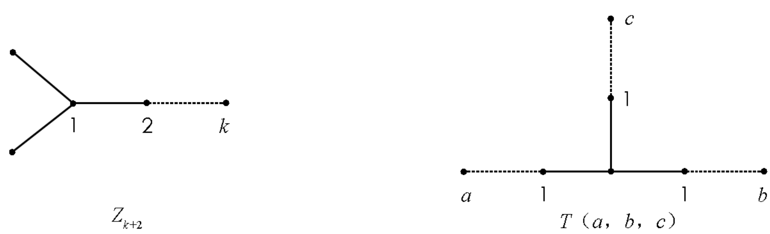

图 1　Z_n 和 $T(a, b, c)$

为了书写方便, 记 $T_1 = T(1, 2, 2)$, $T_2 = T(1, 2, 3)$, $T_3 = T(1, 2, 4)$.

引理 2[4]　若 H 是连通图 G 的真子图, 则 $\rho(H) < \rho(G)$.

引理 3[4]　令 $G = \bigcup_{i=1}^{n} G_i$, 则 $\phi(G) = \prod_{i=1}^{n} \phi(G_i)$.

引理 4[1]　如果两个图同谱, 则这两个图有相同的顶点数和边数.

---

① 收稿日期: 2011-03-06

基金项目: 国家青年科学基金项目(11101232); 青海省自然科学基金青年项目(2011-Z-929Q).

作者简介: 王　微(1986-), 女, 河北唐山人, 硕士研究生, 主要从事图论及其应用的研究.

引理 5[5] 下面的结论成立:

(1) $\phi(Z_{n+2} \cup P_n)=\phi(P_{2n+1} \cup P_1)$;

(2) $\phi(T_1 \cup P_5 \cup P_3)=\phi(P_{11} \cup P_2 \cup P_1)$;

(3) $\phi(T_2 \cup P_8 \cup P_5)=\phi(P_{17} \cup P_2 \cup P_1)$;

(4) $\phi(T_3 \cup P_{14} \cup P_9 \cup P_5)=\phi(P_{29} \cup P_4 \cup P_2 \cup P_1)$.

引理 6[6] 下面的结论成立:

(1) $\rho(P_n)=\rho(T_1)$ 当且仅当 $n=11$;

(2) $\rho(P_n)=\rho(T_2)$ 当且仅当 $n=17$;

(3) $\rho(P_n)=\rho(T_3)$ 当且仅当 $n=29$.

引理 7[6] $\rho(P_n)=\rho(Z_{k+2})$ 当且仅当 $n=2k+1$, 其中 $k \geqslant 1$.

推论 1[6] 设 G 是连通图, 且 $\rho(G)=\rho(P_n)$, 则 $G \in \{P_n(n \geqslant 1), T_1, T_2, T_3, Z_{k+2}\}$. 如果 $G \neq P_n$, 则当 $\rho(G)=\rho(P_{11})$ 时, $G=T_1$; 当 $\rho(G)=\rho(P_{17})$ 时, $G=T_2$; 当 $\rho(G)=\rho(P_{29})$ 时, $G=T_3$; 当 $\rho(G)=\rho(P_{2k+1})$ 时, $G=Z_{k+2}$.

推论 2 设 G 是连通图, 且 $\rho(G)=\rho(Z_{k+2})$, 则 $G \in \{P_n(n \geqslant 1), T_1, T_2, T_3, Z_{k+2}\}$. 如果 $G \neq Z_{k+2}$, 则当 $n=2k+1$ 时, $G=P_n$; 当 $\rho(G)=\rho(Z_{5+2})$ 时, $G=T_1$; 当 $\rho(G)=\rho(Z_{8+2})$ 时, $G=T_2$; 当 $\rho(G)=\rho(Z_{14+2})$ 时, $G=T_3$.

引理 8 $G=P_n \cup Z_{k+2}$, 则 G 的同谱图中不含 T_3 作为分支.

证 对于任意的 $H \sim G$, 有 $\rho(H)=\rho(G)<2$. 由引理 1 知 H 的分支均为树. 又由引理 4 得 $n(H)=n(G)$, $m(H)=m(G)$, $\omega(H)=n(H)-m(H)=n(G)-m(G)=2$. 所以 H 有两个分支, 记为 H_1, H_2. 则 $H=H_1 \cup H_2$, $H_i \in \{P_a, Z_{b+2}, T_1, T_2, T_3\}(i=1,2)$.

假设 T_3 是 H 的一个分支, 不妨设 $H_1=T_3$, 则 $H=T_3 \cup H_2$.

情形 1 当 $n=2k+1$ 时, 由引理 7 和 $\rho(H)=\rho(G)$ 知 $\rho(H)=\rho(T_3)=\rho(H_2)=\rho(P_{2k+1})$. 由引理 6 得 $k=14$. 此时 $G=P_{29} \cup Z_{16}$, $n(G)=n(H)$, 从而 $n(H_2)=37$, 所以 $H_2 \in \{P_{37}, Z_{37}\}$. 若 $H_2=P_{37}$, 则 $\rho(P_{37})>\rho(P_{29})=\rho(T_3)$, 矛盾. 同理可证当 $H_2=Z_{37}$ 时也矛盾.

情形 2 当 $n>2k+1$ 时, 则 $\rho(G)=\rho(P_n)>\rho(Z_{k+2})$.

情形 2.1 若 $\rho(H)=\rho(T_3)>\rho(H_2)$, $\rho(T_3)=\rho(P_{29})=\rho(Z_{14+2})$, 则 $H_2 \in \{P_a(a<29), Z_{b+2}(b<14), T_1, T_2\}$. 因为 $\rho(H)=\rho(G)$, 故 $\rho(T_3)=\rho(P_n)$, 由引理 6 知 $n=29$. 则 $G=P_{29} \cup Z_{k+2}$, $H=T_3 \cup H_2$, $n(G)=n(H)$, 所以 $n(H_2)=23+k>23$, 所以 $H_2 \neq T_1, T_2$.

当 $H_2=P_a(a<29)$ 时, 由 $a=23+k<29$ 得 $k<6$. 当 $k=1$ 时, $a=24$ 且 $G=P_{29} \cup Z_3$, $H=T_3 \cup P_{24}$. 计算得 $\phi(G) \neq \phi(H)$, 矛盾; 当 $k=2,3,4,5$ 时, 同理可得矛盾.

当 $H_2=Z_{b+2}(b<14)$ 时, 由 $b+2=23+k$ 推得 $b=21+k$, 与 $b<14$ 矛盾.

情形 2.2 若 $\rho(H)=\rho(H_2)>\rho(T_3)$, 则 $H_2 \in \{P_a(a>29), Z_{b+2}(b>14)\}$.

如情形 2.1 所证, 当 $H_2=P_a(a>29)$, 或 $H_2=Z_{b+2}(b>14)$ 时, 可以推出矛盾.

情形 3 当 $n<2k+1$ 时, $\rho(G)=\rho(Z_{k+2})>\rho(P_n)$.

情形 3.1 $\rho(H)=\rho(T_3)>\rho(H_2)$, 则 $\rho(H)=\rho(T_3)=\rho(Z_{k+2})=\rho(G)$, 由推论 2 知 $k=14$. 由 $n(G)=n(H)$ 推得 $n(H_2)=8+n>8$, 所以 $H_2 \neq T_1, T_2$, $H_2 \in \{P_a(a<29), Z_{b+2}(b<14)\}$.

当 $H_2=P_a(a<29)$ 时, 由 $a=8+n<29$ 推得 $n<21$, 由 $\phi(H)=\phi(G)$ 和引理 5 得 $\phi(P_4 \cup P_2 \cup P_{8+n})=\phi(P_n \cup P_9 \cup P_5)$, 因为路的并是谱唯一的[1], 显然矛盾.

当 $H_2=Z_{b+2}(b<14)$ 时, 由 $n(H)=n(G)$ 得 $n \leqslant 7$. 由 $\phi(H)=\phi(G)$ 和引理 5 得 $\phi(P_4 \cup P_2 \cup Z_{8+n})=\phi(P_n \cup P_9 \cup P_5)$, 故 $\rho(Z_{8+n})=\rho(P_9)$, 由引理 7 知矛盾.

情形 3.2 当 $\rho(H)=\rho(H_2)>\rho(T_3)$ 时, $H_2 \neq T_1, T_2$, 所以 $H_2 \in \{P_a(a>29), Z_{b+2}(b>14)\}$.

如情形 3.1 所证, 当 $H_2=P_a(a>29)$, 或 $H_2=Z_{b+2}(b>14)$ 时, 可得矛盾.

2 主要结果

定理 1 $G=P_n \cup Z_{k+2}$, 则

(1) 若 $n=k$，则 $[G]_\phi=\{P_n\cup Z_{k+2},P_{2n+1}\cup P_1\}$；

(2) 若 $n\neq k$，则

(2.1) 当 $n=1$，$k=8$ 时，$[G]_\phi=\{P_1\cup Z_{10},T_2\cup Z_4\}$；

(2.2) 当 $n=2$，$k=5$ 时，$[G]_\phi=\{P_2\cup Z_7,T_1\cup P_3\}$；

(2.3) 当 $n=2$，$k=8$ 时，$[G]_\phi=\{P_2\cup Z_{10},T_2\cup P_5\}$；

(2.4) 当 $(n,k)\in\{(n,k)\mid(n,k)\neq(1,8),(2,5),(2,8)\}$ 时，$[G]_\phi=\{P_n\cup Z_{k+2}\}$.

证　对任意 $H\sim G$，由引理 8 的证明知 $H=H_1\cup H_2$，$H_i\in\{P_a,Z_{b+2},T_1,T_2\}(i=1,2)$.

情形 1　当 $n=2k+1$ 时，由引理 7 知 $\rho(P_n)=\rho(Z_{k+2})$，所以 $\rho(G)=\rho(P_n)=\rho(Z_{k+2})$. 因为 $H\sim G$，所以 $\rho(H)=\rho(H_1)=\rho(H_2)$.

情形 1.1　若 $H_1=P_a$，由 $\rho(H)=\rho(G)$ 得 $a=2k+1$. 又因 $n(G)=n(H)$，$n(H_2)=k+2$，$\phi(H)=\phi(G)$，故 $\phi(H_2)=\phi(Z_{k+2})$，$\rho(H_2)=\rho(Z_{k+2})$，由推论 2，$H_2\in\{Z_{k+2},P_{2k+1},T_1(k=5),T_2(k=8)\}$.

当 $H_2=Z_{k+2}$ 时，显然 $H\cong G$，所以 H 属于情形(2.4)；

当 $H_2=P_{2k+1}$ 时，$2k+1=k+2$，$k=1$. 则 $G\cong H$，所以 H 属于情形(2.4)；

当 $H_2=T_1$ 时，$k=5$，$n(T_1)=6$，与 $n(H_2)=k+2=7$ 矛盾；

当 $H_2=T_2$ 时，同理可得矛盾.

情形 1.2　$H_1=Z_{b+2}$，$H_2=P_a$ 时如情形 1.1 所证. 考虑 $H_2\in\{Z_{b+2},T_1,T_2\}$. 由 $\rho(H)=\rho(G)$ 得 $b=k$，又因 $n(T_1)$ 是偶数，由 $n(H)=n(G)$ 得 $n(H_2)=2k+1$ 是奇数，所以 $H_2\neq T_1$. 又由 $\phi(H)=\phi(G)$ 得 $\phi(H_2)=\phi(P_{2k+1})$，$\rho(H_2)=\rho(P_{2k+1})$. 由推论 1，$H_2\in\{P_{2k+1},Z_{b+2}(b=k),T_2(k=8)\}$. 若 $H_2=P_{2k+1}$，显然 $H\cong G$. 所以 H 属于情形(2.4). 若 $H_2=Z_{k+2}$，由 $k+2=2k+1$ 推得 $k=1$，$H\cong G$. 若 $H_2=T_2$，此时 $k=8$，$\rho(T_2)=\rho(P_{17})$，而 $n(H_2)=n(T_2)=7$，$k=3$，与 $k=8$ 矛盾.

情形 1.3　当 $H_1=T_1$，$H_2=P_a,Z_{b+2}$ 时如情形 1.1 和 1.2 所证，所以 $H_2\neq P_a,Z_{b+2}$. $\rho(H)=\rho(T_1)=\rho(H_2)$，所以 $H_2\neq T_2$. 因为 $\rho(T_2)>\rho(T_1)$，故 H_2 只能是 T_1. 由 $\rho(H)=\rho(G)=\rho(P_{2k+1})$ 推得 $k=5$，此时 $G=P_{11}\cup Z_7$，而 $n(H)\neq n(G)$，导致矛盾.

情形 1.4　当 $H_1=T_2$，$H_2=P_a,Z_{b+2},T_1$ 时如情形 1.1、1.2 和 1.3 所证. 当 $H_2=T_2$ 时，$H=T_2\cup T_2$，$G=P_{2k+1}\cup Z_{k+2}$，$n(G)=3k+3=14=n(H)$，矛盾.

所以，当 $n=2k+1$ 时，$[G]_\phi=\{P_n\cup Z_{k+2}\}$.

情形 2　当 $n<2k+1$ 时，$\rho(G)=\rho(Z_{k+2})>\rho(P_n)$，不妨设 $\rho(H)=\rho(H_1)>\rho(H_2)$，$H_i\in\{P_a,Z_{b+2},T_1,T_2\}(i=1,2)$.

情形 2.1　若 $H_1=P_a$，$\rho(P_a)=\rho(Z_{k+2})$，则 $a=2k+1$，$H=P_{2k+1}\cup H_2$，$G=P_n\cup Z_{k+2}$，则 $2k+1+n(H_2)=n+k+2$，$n(H_2)=n-k+1\geqslant 1$，$n-k\geqslant 0$，$n\geqslant k$.

如果 $n=k$，$n(H_2)=1$，由引理 5 知 $H\sim G$，所以 H 属于情形(1).

如果 $n>k$，若 $H_2=P_b$，则 $b=n-k+1$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 和引理 5 得 $\phi(P_{n-k+1}\cup P_k)=\phi(P_n\cup P_1)$，因为 $n>k$，所以 P_k 是 P_n 的真子图，所以 $\rho(P_{n-k+1})=\rho(P_n)$，$n-k+1=n$，从而推得 $k=1$，此时 $H=P_3\cup P_n\cong G=Z_3\cup P_n$，所以 H 属于情形(2.4)；

若 $H_2=Z_{b+2}$，$\rho(H_2)=\rho(Z_{b+2})<\rho(Z_{k+2})$，则 $b<k$. 又 $n(H_2)=n-k+1$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 和引理 5 得 $\phi(Z_{n-k+1}\cup P_k)=\phi(P_n\cup P_1)$，因为 $n>k$，所以 $\rho(Z_{n-k+1})=\rho(P_n)$，由引理 7 得 $n=2(n-k-1)+1=2n-2k-1$，求得 $n=2k+1$，与 $n<2k+1$ 矛盾；

若 $H_2=T_1$，$\rho(T_1)<\rho(H)=\rho(G)=\rho(Z_{k+2})$，由推论 2 得 $k>5$，由 $2k+1+6=n+k+2$ 得 $n=k+5$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 和引理 5 可得 $\phi(T_1\cup P_k)=\phi(P_{k+5}\cup P_1)$，因为 P_k 是 P_{k+5} 的真子图，所以 $\rho(T_1)=\rho(P_{k+5})$，由引理 6 知 $k=6$，计算知 $\phi(T_1)\phi(P_6)\neq\phi(P_{11})\phi(P_1)$，矛盾；

若 $H_2=T_2$，$\rho(T_2)<\rho(Z_{k+2})$，由推论 2 知 $k>8$，$n(H)=n(G)$，$n=k+6$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 和引理 5 可得 $\phi(T_2)\phi(P_k)=\phi(P_{k+6})\phi(P_1)$，因为 $\rho(P_k)<\rho(P_{k+6})$，所以 $\rho(T_2)=\rho(P_{k+6})$，由引理 6 知 $k=11$，通过计算知 $\phi(T_2\cup P_{11})\neq\phi(P_{17}\cup P_1)$，矛盾.

情形 2.2　若 $H_1=Z_{b+2}$，$\rho(H)=\rho(Z_{b+2})=\rho(Z_{k+2})=\rho(G)$，则 $b=k$，$H=Z_{k+2}\cup H_2$，$G=Z_{k+2}\cup P_n$，

$n(H_2)=n$，$H_2\in\{P_n, Z_n, T_1(n=6), T_2(n=7)\}$；

若 $H_2=P_n$，$H\cong G$，则 H 属于情形(2.4)；

若 $H_2=Z_n$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 且约去公因式得 $\phi(Z_n)=\phi(P_n)$，则 $\rho(Z_n)=\rho(P_n)$，易知 $n=2(n-2)+1=2n-3$，推得 $n=3$，这时 $H\cong G$，所以 H 属于情形(2.4)；

若 $H_2=T_1$，$n=6$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 得 $\phi(T_1)=\phi(P_6)$，矛盾；

同理当 $H_2=T_2$ 时可得矛盾.

情形 2.3　若 $H_1=T_1$，$\rho(H)=\rho(T_1)=\rho(G)$，由推论 2 知 $k=5$，又由 $n(H)=n(G)$ 推得 $n(H_2)=n+1$，又因为 $\rho(H)=\rho(H_1)=\rho(T_1)>\rho(H_2)$，所以 $H_2\in\{P_{n+1}, Z_{n+1}\}$；

若 $H_2=P_{n+1}$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 得 $\phi(P_{n+1})(x^2-1)=\phi(P_n)x(x^2-2)$，因为 P_n 是 P_{n+1} 的真子图，$\rho(P_{n+1})>\rho(P_n)$，所以 $\rho(P_{n+1})=\sqrt{2}$，由引理 2 和 $\rho(P_3)=\sqrt{2}$ 得 $n=2$，这时 $H=T_1YP_3\sim G=P_2YZ_7$，所以 H 属于情形(2.2)；

同理可证当 $H_2=Z_{n+1}$ 时，$H=T_1\cup Z_3\sim G=P_2\cup Z_7$，所以 H 属于情形(2.2).

情形 2.4　若 $H_1=T_2$，$\rho(H)=\rho(T_2)=\rho(G)$，由推论 2 得 $k=8$，又由 $n(H)=n(G)$ 推得 $n(H_2)=n+3$，又 $\rho(H)=\rho(H_1)=\rho(T_2)>\rho(H_2)$，所以 $H_2\in\{P_{n+3}(n<14), Z_{n+3}(n<7), T_1(n=3)\}$；

若 $H_2=P_{n+3}$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 且约去公因式得 $\phi(P_{n+3})x=\phi(P_n)x^2(x^2-3)$，因为 P_n 是 P_{n+3} 的真子图，由引理 2 得 $\rho(Z_{n+1})>\rho(P_n)$，所以 $\rho(P_{n+3})=\sqrt{3}$，由 $\rho(P_5)=\sqrt{3}$ 知 $n=2$，此时 $H=T_2\cup P_5\sim G=Z_{10}\cup P_2$，所以 H 属于情形(2.3)；

若 $H_2=Z_{n+3}$，同理可得 $\rho(Z_{n+3})=\sqrt{3}$，$n=1$，$H=T_2YZ_4\sim G=P_1YZ_{10}$，所以 H 属于情形(2.1)；

若 $H_2=T_1$，此时 $n=3$，$H=T_2\cup T_1$，$G=Z_{10}\cup P_3$，通过计算知 $\phi(H)\neq\phi(G)$，矛盾.

情形 3　当 $n>2k+1$ 时，$\rho(G)=\rho(P_n)>\rho(Z_{2k+1})$，不妨设 $\rho(H)=\rho(H_1)>\rho(H_2)$，$H_i\in\{P_a, Z_{b+2}, T_1, T_2\}(i=1,2)$.

情形 3.1　若 $H_1=P_a$，$\rho(H)=\rho(P_a)=\rho(P_n)=\rho(G)$，$a=n$. 这时 $H=P_n\cup H_2$，$G=P_n\cup Z_{k+2}$，$n(H)=n(G)$ 推得 $n(H_2)=k+2$，$H_2\in\{P_{k+2}, Z_{k+2}, T_1(k=4), T_2(k=5)\}$.

若 $H_2=P_{k+2}$，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 且约去公因式得 $\phi(P_{k+2})=\phi(Z_{k+2})$，$\rho(P_{k+2})=\rho(Z_{k+2})$，由引理 7 知 $k+2=2k+1$，$k=1$，此时 $H\cong G$，所以 H 属于情形(2.4)；

若 $H_2=Z_{k+2}$，显然 $H\cong G$，所以 H 属于情形(2.4)；

若 $H_2=T_1$，$k=4$，$H=P_n\cup T_1$，$G=P_n\cup Z_6$，显然，$\phi(T_1)\neq\phi(Z_6)$；

若 $H_2=T_2$，$k=5$，$H=P_n\cup T_2$，$G=P_n\cup Z_7$，显然，$\phi(T_2)\neq\phi(Z_7)$.

情形 3.2　若 $H_1=Z_{b+2}$，$\rho(H)=\rho(Z_{b+2})=\rho(P_n)=\rho(G)$，$n=2b+1>2k+1$，$b>k$，这时 $H=Z_{b+2}\cup H_2$，$G=P_{2b+1}\cup Z_{k+2}$，由 $n(H)=n(G)$ 得 $n(H_2)=b+k+1\geqslant b+2$，因为 $\rho(Z_{b+k+1})\geqslant\rho(Z_{b+2})$，所以 $H_2\neq Z_{b+k+1}$，$H_2\in\{P_{b+k+1}, T_1(b+k=5), T_2(b+k=6)\}$.

当 $H_2=P_{b+k+1}$ 时，由 $\phi(H)=\phi(G)$ 和引理 5 得 $\phi(P_1\cup P_{b+k+1})=\phi(P_b\cup Z_{k+2})$，因为 Z_{k+2} 是 P_{b+k+1} 的子图，所以 $\rho(P_{b+k+1})=\rho(Z_{k+2})$，由引理 7 得 $b=k$，与 $b>k$ 矛盾；

当 $H_2=T_1$ 时，$b+k=5$，$\rho(T_1)<\rho(Z_{b+2})$，推得 $b>5$，矛盾；

当 $H_2=T_2$ 时，$b+k=6$，$\rho(T_1)<\rho(Z_{b+2})$，推得 $b>8$，矛盾.

情形 3.3　若 $H_1=T_1$，$\rho(H)=\rho(T_1)=\rho(P_n)=\rho(G)$，由引理 6 得 $n=11$，$H=T_1\cup H_2$，$G=P_{11}\cup Z_{k+2}$，由 $n(H)=n(G)$ 得 $n(H_2)=7+k$，因为 $\rho(H_2)<\rho(H_1)=\rho(T_1)$，所以 $H_2\neq T_1, T_2$，$H_2\in\{P_{7+k}, Z_{7+k}\}$.

当 $H_2=Z_{7+k}$ 时，$\rho(H_2)=\rho(Z_{7+k})<\rho(T_1)$，由推论 2 得 $7+k<7$，而 $k\geqslant 1$，显然矛盾；

当 $H_2=P_{7+k}$ 时，$\rho(H_2)=\rho(P_{7+k})<\rho(T_1)$，由推论 2 得 $7+k<11$，$k\leqslant 3$. $k=1$ 时，$H=T_1\cup P_8$，$G=P_{11}\cup Z_3$，通过计算 $\phi(H)\neq\phi(G)$，矛盾；$k=2,3$ 时，同理可证矛盾.

情形 3.4　若 $H_1=T_2$，$\rho(T_2)=\rho(P_n)$，由引理 6，$n=17$. 由 $n(H)=n(G)$ 得 $n(H_2)=k+12>12$. 因为 $\rho(H_2)<\rho(T_2)$，且 $n(H_2)>12$，所以 $H_2\neq T_1, T_2$，$H_2\in\{P_{k+12}, Z_{k+12}\}$.

当 $H_2 = P_{k+12}$ 时，$\rho(P_{k+12}) < \rho(H) = \rho(G) = \rho(P_{17})$，所以 $k+12<17$，$k \leqslant 4$. $k=1$ 时，$H = T_2 \cup P_{13}$，$G = P_{17} \cup Z_3$，计算得 $\phi(H) \neq \phi(G)$，矛盾；当 $k=2,3,4$ 时，同理可证矛盾；

当 $H_2 = Z_{k+12}$ 时，$\rho(Z_{k+12}) < \rho(P_{17})$，故 $2(k+10)+1<17$ 得 $k<-2$，矛盾.

所以，当 $n > 2k+1$ 时，$[G]_\phi = \{P_n \cup Z_{k+2}\}$.

推论 3　若 $(n, k) \in \{(n, k) \mid n \neq k$ 且 $(n, k) \neq (1, 8), (2, 5), (2, 8)\}$，则 $G = P_n \cup Z_{k+2}$ 是谱唯一的.

致谢：感谢王建锋博士和导师冶成福教授的精心指导.

参考文献：

[1] VANDAM E R, HAEMERS W H. Which Graphs are Determined by Their Spectra [J]. Linear Algebra Appl, 2003, 373: 241－172.

[2] OMIDI G R. The Spectral Characterization of Graphs of Index Less than 2 with No Path as a Component [J]. Linear Appl, 2008, 428: 1696－1705.

[3] SMITH J H. Some Properties of the Spectrum of a Graph [M]. New York: Combinatorial Structures and Their Applications, 1970: 403－406.

[4] CVETKOVIC D M, DOOB M, SACHS H. Spectral of Graphs [M]. 3th ed. Heidelberg: Theory and Applications, Johann Ambrosius Barth Verlag, 1995.

[5] CVETKOVIC D M, GUTMAN I. On Spectral Structrue of Graphs Having the Maximal Eigenvalue Not Greater than Two [J]. Publ Inst Math Beogard, 1975, 18: 39－45.

[6] WANG Jian-feng, HUANG Qiong-xiang, LIU Yong-zhi, et al. The Cospectral Equivalence Classes of Graphs Having an Isolated Vertex [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57: 1638－1644.

The Cospectral Equivalence Class of Graph $P_n \cup Z_{K+2}$

WANG　Wei

Department of Mathematics and Information Science, Qinghai Normal University, Xining 810008, China

Abstract: Let $\phi(G, \lambda)$ be the characteristic polynomial of a graph G. Using the characteristic polynomial of a graph, spectral radins and the relationship of n and k, the spectral equivalence class of $P_n \cup Z_{k+2}$ is detemined under three cases.

Key words: characteristic polynomial; cospectral equivalence class; cospectral graph

责任编辑　廖　坤