第 37 卷 第 4 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2012 年 4 月
Vol. 37 No. 4　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Apr. 2012

文章编号:1000-5471(2012)04-0024-05

一类图匹配唯一的充要条件[①]

乔友付，　詹福琴

河池学院 数学系，广西 宜州 546300

摘要：利用匹配多项式的特征标和最大实数根的分布规律证明了：当 $n\geqslant 1$ 时，$T(1,1,n,5,1)$匹配唯一的充要条件是 $n\neq 1,2,4,5,8$.

关 键 词：匹配多项式；匹配等价；匹配唯一性；特征标；最大实数根

中图分类号：**O157.5**　　**文献标志码**：**A**

本文仅考虑有限、无向简单图. 图 G 的一个匹配是指 G 的一个生成子图，它的每个分支或是一个孤立点或是一条孤立边. t-匹配是指有 t 条边的匹配. 文献[1] 定义图的匹配多项式为

$$\mu(G,\ x)=\sum_{t\geqslant 0}(-1)^{t}p(G,\ t)x^{n-2t}$$

其中 $p(G,t)$ 表示 G 的 t-匹配的数目，$p(G,0)=1$. 对两个图 G 和 H，若有 $\mu(G,x)=\mu(H,x)$，则称 G 和 H 匹配等价，记为 $G\sim H$. 若与图 G 匹配等价的所有图 H 均有 $H\cong G$，则称 G 是匹配唯一的.

自文献[2] 引入图的匹配多项式概念以来，对图的匹配唯一性和匹配等价性的研究已有部分结果，所用方法大多为比较匹配多项式的系数或最大实数根[3-9]，但刻画点和边较多的图的匹配性是相当困难的，因此还存在许多问题有待研究. 本文利用图的特征标及最大实数根的分布规律完整刻画了 $T(1,1,n,5,1)$ 及其补图的匹配唯一性.

设G是有n个顶点的图，$V(G)$，$E(G)$，$p(G)$，$q(G)$，$\overline{G}$ 分别表示图G的顶点集、边集、顶点数、边数及补图. $G\cup H$ 表示图G 和H 的不交并，nG 表示 n 个G 的不交并. $d(v)$ 表示图G中顶点 v 的度. $M(G,x)$ 表示图 G 的匹配多项式$\mu(G,x)$ 的最大实数根.

为方便，本文用 $\mu(G)$ 表示 $\mu(G,x)$，$M(G)$ 表示 $M(G,x)$，$\mu(a,b,c)$ 和 $\mu(a,b,n,c,d)$ 分别表示 $\mu(T(a,b,c),x)$，$\mu(T(a,b,n,c,d),x)$，$M(a,b,c)$ 和 $M(a,b,n,c,d)$ 分别表示 $M(T(a,b,c),x)$，$M(T(a,b,n,c,d),x)$. 设 F 是图 H 的连通分支，且 $M(F)=M(H)$，则称 F 是图 H 的特殊分支.

文中所给图的匹配多项式的最大实数根均由 Mathematica 4.0 计算所得，其它未特别说明的概念和术语均参见文献[3]. 为证明需要，还需定义下列图类(如图 1 所示)：

P_n 和 C_n 分别表示 n 个顶点的路和圈；

$T(a,b,c)(a\leqslant b\leqslant c)$ 表示从一顶点分别引出 3 条长为 a,b,c 的路所得到的图；

$D_{m,n}$ 表示把 C_m 的一个顶点和 P_{n+1} 的一个 1-度点重迭后得到的图；

$T(a,b,n,c,d)$ 表示从 P_{n+1} 的两个1-度点分别引出两条长为 a,b 和 c,d 的路所得到的图，特别地，当

---

① 收稿日期：2011-02-22

基金项目：国家自然科学基金资助项目(10761008)；广西教育厅科研项目(201010LX471；201010LX495；201106LX595；201106LX608)；河池学院重点科研项目(2011YBZ-N003).

作者简介：乔友付(1978-)，男，安徽霍邱人，讲师，主要从事图论及其应用的研究.

通信作者：詹福琴.

$a=b=c=d=1$ 时，该图表示为 U_n；

当 $a\geqslant 3$，$b\geqslant 2$，$c\geqslant 2$ 时，设 u 和 w 是 C_a 的两个不同的顶点，$C_a(P_b,P_c)$ 表示将 P_b 和 P_c 的一个 1-度点分别与 u 和 w 重迭后得到的图；

$C_m(a,b,c)$ 表示将 C_m 的一个顶点与 $T(a,b,c)$ 的一个 1-度点重迭后得到的图；

$T(a,b,c,d)(a\leqslant b\leqslant c\leqslant d)$ 表示从一顶点 v 分别引出 4 条长为 a,b,c,d 的路得到的图；

$T(a,b,n,m,c,d)$ 表示将 $T(a,b,n,c,d)$ 内部路中的一个 2-度点与 P_{m+1} 的一个 1-度点重迭后得到的图.

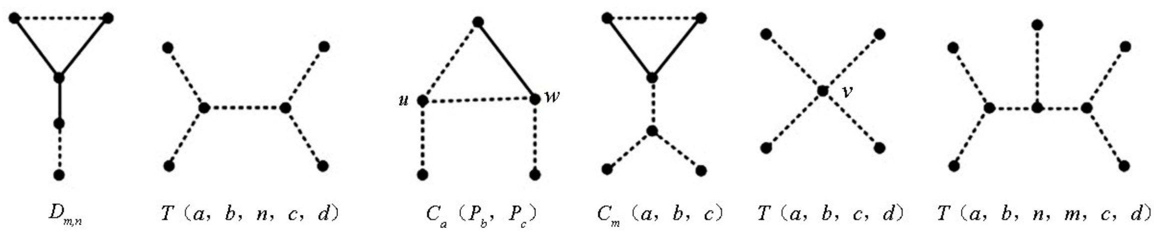

图 1　图类

引理 1　设 $m\geqslant 3$，$t\geqslant 1$，则 $M(D_{s,t})=M(D_{t+2,s-2})$.

证　由文献[1]的定理 1.1.1 可得 $\mu(D_{s,t})=\mu(P_{s+t})-\mu(P_t)\mu(P_{s-2})$，$\mu(D_{t+2,s-2})=\mu(P_{s+t})-\mu(P_t)\mu(P_{s-2})$，从而 $\mu(D_{s,t})=\mu(D_{t+2,s-2})$. 因此，$M(D_{s,t})=M(D_{t+2,s-2})$.

引理 2　设 $n\geqslant 9$，$m\geqslant 1$，则

(1) $M(1,6,7)<M(1,1,n,5,1)<M(1,6,9)<M(1,6,9+m)$；

(2) $M(1,1,n,5,1)<M(1,b,c)(7\leqslant b\leqslant c)$；

(3) $M(2,2,5)<M(1,1,n,5,1)<M(2,2,6)$；

(4) $M(D_{7,1})=M(D_{3,5})<M(1,1,n,5,1)<M(D_{3,6})=M(D_{8,1})$；

(5) $M(1,1,n,5,1)<M(2,3,3)=M(D_{4,2})$；

(6) $M(1,1,2,2,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,1,1,2,1)$；

(7) $M(1,1,4,3,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,1,3,3,1)$；

(8) $M(1,1,6,4,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,1,5,4,1)$；

(9) $M(1,2,5,2,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,2,4,2,1)$；

(10) $M(1,2,7,3,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,2,6,3,1)$；

(11) $M(1,3,9,3,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,3,8,3,1)$；

(12) $M(1,2,9,4,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,2,8,4,1)$；

(13) $M(1,3,12,4,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,3,10,4,1)$；

(14) $M(1,4,14,4,1)<M(1,1,n,5,1)<M(1,4,12,4,1)$.

证　(1) 因为 $M(1,6,7)=M(1,5,15)$，$M(1,6,9)=M(1,1,8,5,1)$，由文献[10]的引理 15 和引理 10 可得 $M(1,6,7)<M(1,1,n,5,1)<M(1,6,9)<M(1,6,9+m)$.

(2) 因为 $M(1,6,9)=M(1,7,7)$，由结论(1)和文献[1]的推论 6.1.3 可得 $M(1,1,n,5,1)<M(1,7,7)\leqslant M(1,b,c)(7\leqslant b\leqslant c)$.

(3) 因为 $M(2,2,5)=M(1,5,8)$，$M(2,2,6)=M(1,1,8,5,1)$，由文献[10]的引理 15 和引理 10 可得 $M(2,2,5)<M(1,1,n,5,1)<M(2,2,6)$.

(4) 由引理 1 和文献[4]的引理 7 可得 $M(D_{7,1})=M(D_{3,5})=M(2,2,5)$，$M(D_{8,1})=M(D_{3,6})=M(2,2,6)$. 再由结论(3)可得 $M(D_{7,1})=M(D_{3,5})<M(1,1,n,5,1)<M(D_{3,6})=M(D_{8,1})$.

(5) 因为 $M(2,3,3)=M(D_{4,2})=M(2,2,6)$，由结论(3)可得 $M(1,1,n,5,1)<M(2,3,3)=M(D_{4,2})$.

(6) 因为 $M(1,1,2,2,1)=M(1,5,5)$，$M(1,1,1,2,1)=M(1,1,8,5,1)$，由文献[10]的引理

15 和引理 10 可得 $M(1, 1, 2, 2, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 1, 1, 2, 1)$.

(7) 因为 $M(1, 1, 4, 3, 1) = M(1, 5, 7)$, $M(1, 1, 3, 3, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 1, 4, 3, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 1, 3, 3, 1)$.

(8) 因为 $M(1, 1, 6, 4, 1) = M(1, 5, 11)$, $M(1, 1, 5, 4, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 1, 6, 4, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 1, 5, 4, 1)$.

(9) 因为 $M(1, 2, 5, 2, 1) = 2.046\,71$, $M(1, 5, 7) = 2.047\,81$, $M(1, 2, 4, 2, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 2, 5, 2, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 2, 4, 2, 1)$.

(10) 因为 $M(1, 2, 7, 3, 1) = M(1, 5, 8)$, $M(1, 2, 6, 3, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 2, 7, 3, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 2, 6, 3, 1)$.

(11) 因为 $M(1, 3, 9, 3, 1) = 2.050\,08$, $M(1, 5, 11) = 2.050\,6$, $M(1, 3, 8, 3, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 3, 9, 3, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 3, 8, 3, 1)$.

(12) 因为 $M(1, 2, 9, 4, 1) = 2.050\,88$, $M(1, 5, 14) = 2.050\,98$, $M(1, 2, 8, 4, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 2, 9, 4, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 2, 8, 4, 1)$.

(13) 因为 $M(1, 3, 12, 4, 1) = M(1, 5, 9)$, $M(1, 3, 10, 4, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 3, 12, 4, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 3, 10, 4, 1)$.

(14) 因为 $M(1, 4, 14, 4, 1) = M(1, 5, 11)$, $M(1, 4, 12, 4, 1) = M(1, 1, 8, 5, 1)$, 由文献[10] 的引理 15 和引理 10 可得 $M(1, 4, 14, 4, 1) < M(1, 1, n, 5, 1) < M(1, 4, 12, 4, 1)$.

引理 3 树 $T(1, 1, 3, 5, 1)$ 是匹配唯一的.

证 计算可得 $\mu(1, 1, 3, 5, 1) = x^2(x^{10} - 11x^8 + 43x^6 - 71x^4 + 45x^2 - 8)$, $M(1, 1, 3, 5, 1) = 2.066 > \sqrt{2+\sqrt{5}}$. 因为 $x^{10} - 11x^8 + 43x^6 - 71x^4 + 45x^2 - 8$ 不可约, 从而 $T(1, 1, 3, 5, 1) \sim H \cup aK_1$, 其中 $a \geqslant 0$, H 连通且 $M(H) = M(1, 1, 3, 5, 1)$. 由文献[11] 的定理 3 和定理 4 可得 $R_m(1, 1, 3, 5, 1) = R_m(H) + 0 = -1$. 由文献[11] 的定理 4、文献[12] 的定理 1、文献[13] 的引理 1 可得 $H \in \{D_{s,t}, T(a, b, n, c, d) \mid s + t = 11, s \geqslant 4, t \geqslant 2, a + b + n + c + d = 11, a, b, c, d$ 不同时为 $1\}$.

由文献[14] 的定理 5、定理 6、定理 7、文献[1] 的推论 2.1.4 和文献[10] 的引理 10 可得 $H \notin \{T(a, b, n, c, d) \mid a + b + n + c + d = 11, a, b, c, d$ 不同时为 $1\} - \{T(1, 1, 3, 5, 1)\}$. 再由表 1 和引理 1 可得 $H \notin \{D_{s,t} \mid s + t = 11, s \geqslant 4, t \geqslant 2\}$.

因此, 仅有 $H = T(1, 1, 3, 5, 1)$, 所以 $a = 0$, 即 $T(1, 1, 3, 5, 1)$ 是匹配唯一的.

表 1 几类图的最大实数根

G	$M(G)$	G	$M(G)$	G	$M(G)$
$T(1, 5, 5)$	2.042 08	$T(1, 5, 6)$	2.045 7	$T(1, 5, 7)$	2.047 81
$T(1, 5, 8)$	2.049 07	$T(1, 5, 9)$	2.049 84	$T(1, 5, 11)$	2.050 6
$T(1, 5, 14)$	2.050 98	$T(1, 5, 15)$	2.051 02	$T(1, 6, 6)$	2.049 07
$T(1, 6, 7)$	2.051 02	$T(1, 6, 8)$	2.052 18	$T(1, 6, 9)$	2.052 88
$T(1, 7, 7)$	2.052 88	$T(2, 2, 5)$	2.049 07	$T(2, 2, 6)$	2.052 88
$T(2, 3, 3)$	2.052 88	$D_{3,5}$	2.049 07	$D_{3,6}$	2.052 88
$D_{3,11}$	2.057 75	$D_{4,2}$	2.052 88	$D_{4,7}$	2.092 18
$D_{4,10}$	2.093 34	$D_{5,6}$	2.106 72	$D_{5,9}$	2.108 38
$D_{6,5}$	2.111 99	$D_{6,8}$	2.114 91	$D_{7,7}$	2.117 66
$D_{8,6}$	2.118 42	$T(1, 1, 1, 2, 1)$	2.052 88	$T(1, 1, 2, 2, 1)$	2.042 08
$T(1, 1, 3, 3, 1)$	2.052 88	$T(1, 1, 4, 3, 1)$	2.047 81	$T(1, 1, 5, 4, 1)$	2.052 88
$T(1, 1, 6, 4, 1)$	2.050 6	$T(1, 2, 4, 2, 1)$	2.052 88	$T(1, 2, 5, 2, 1)$	2.046 71
$T(1, 2, 6, 3, 1)$	2.052 88	$T(1, 2, 7, 3, 1)$	2.049 07	$T(1, 3, 8, 3, 1)$	2.052 88
$T(1, 3, 9, 3, 1)$	2.050 08	$T(1, 2, 8, 4, 1)$	2.052 88	$T(1, 2, 9, 4, 1)$	2.050 88
$T(1, 3, 10, 4, 1)$	2.052 88	$T(1, 3, 11, 4, 1)$	2.051 18	$T(1, 3, 12, 4, 1)$	2.049 84
$T(1, 4, 12, 4, 1)$	2.052 88	$T(1, 4, 13, 4, 1)$	2.051 63	$T(1, 4, 14, 4, 1)$	2.050 6
$T(1, 1, 3, 5, 1)$	2.066	$T(1, 1, 6, 5, 1)$	2.055 28	$T(1, 1, 7, 5, 1)$	2.053 83
$T(1, 1, 8, 5, 1)$	2.052 88	$T(1, 1, 9, 5, 1)$	2.052 26	$T(1, 1, 10, 5, 1)$	2.051 85

$T(1,1,11,5,1)$	2.051 58	$T(1,1,15,5,1)$	2.051 18

引理 4　树 $T(1,1,6,5,1)$ 是匹配唯一的.

证　设图 $H=\bigcup_i H_i$，其中 H_i 连通且 $M(H)=M(1,1,6,5,1)$. 计算可得 $\mu(1,1,6,5,1)=x^3(x^2-2)(x^{10}-12x^8+52x^6-97x^4+72x^2-17)$. 因为 $\mu(P_3)=x(x^2-2)$，从而有 $\mu(P_3)\mid\mu(1,1,6,5,1)$ 且 $\mu^2(P_3)\nmid\mu(1,1,6,5,1)$. 因此，$H$ 的分支中最多只能有一个为 P_3.

情形 1　H 含有一个 P_3 分支，则 $H=P_3\cup H'$，其中 $\mu(H')=x^2(x^{10}-12x^8+52x^6-97x^4+72x^2-17)$. 由文献[11]的定理 4 知 $R_m(H')=-2$ 且 $q(H')=12$. 因为 $x^{10}-12x^8+52x^6-97x^4+72x^2-17$ 不可约，由文献[11]的定理 4 以及点数和边数的关系可得 $H'\in\{C_a(P_b,P_c),C_m(a,b,c)\}$. 由计算知，$H'\in\{C_a(P_b,P_c),C_m(a,b,c)\}$ 的图均不满足 $\mu(H')=x^2(x^{10}-12x^8+52x^6-97x^4+72x^2-17)$.

情形 2　H 不含 P_3 分支，则 $T(1,1,6,5,1)\sim H\cup aK_1$，其中 $a\geqslant 0$，H 连通且 $M(H)=M(1,1,6,5,1)$. 由文献[11]的定理 3、定理 4 可得 $R_m(1,1,6,5,1)=R_m(H)+0=-1$. 由文献[11]的定理 4、文献[12]的定理 1、文献[13]的引理 1、文献[14]的定理 5、定理 6、定理 7 和文献[1]的推论 2.1.4 以及点数和边数的关系可得 $H\in\{D_{3,11},D_{4,10},D_{5,9},D_{6,8},D_{7,7},D_{8,6},D_{9,5},D_{10,4},D_{11,3},D_{12,2},D_{13,1},T(1,1,6,5,1)\}$.

由表 1 和引理 1 知 $H\notin\{D_{3,11},D_{4,10},D_{5,9},D_{6,8},D_{7,7},D_{8,6},D_{9,5},D_{10,4},D_{11,3},D_{12,2},D_{13,1}\}$. 因此，仅有 $H=T(1,1,6,5,1)$. 所以 $a=0$，即 $T(1,1,6,5,1)$ 是匹配唯一的.

类似引理 3 的证明，容易得到下面结果：

引理 5　树 $T(1,1,7,5,1)$ 是匹配唯一的.

定理 1　设 $n\geqslant 1$，树 $T(1,1,n,5,1)$ 匹配唯一当且仅当 $n\neq 1,2,4,5,8$.

证　由于 $\mu(1,1,1,5,1)=x\mu(D_{7,2})$，$\mu(1,1,2,5,1)=\mu(1,1,1)\mu(D_{5,2})$，$\mu(1,1,4,5,1)=\mu(C_4)\mu(1,1,2,3,1)$，$\mu(1,1,5,5,1)=x\mu(D_{12,1})$，$\mu(1,1,8,5,1)=x\mu(1,1,5)\mu(D_{8,1})$，从而必要性成立.

下证充分性.

(1) 若 $n\geqslant 9$，设 $\mu(H)=\mu(1,1,n,5,1)$，则 $M(H)=M(1,1,n,5,1)$. 令 H_1 是 H 的特殊分支，由文献[12]的定理 1 可得 $M(H_1)\in(2,\sqrt{2+\sqrt{5}}]$. 因此，$H_1$ 只能为下列图之一：

(1.1) $T(1,b,c)$. 当 $b\leqslant 5$ 时，由文献[10]的引理 15 可得 $M(1,b,c)<M(1,1,n,5,1)$，因此 $T(1,b,c)$ 不能作为 H 的特殊分支；当 $6=b\leqslant c$ 时，由表 1 知 $M(1,1,10,5,1)<M(1,6,8)<M(1,1,9,5,1)$，因此，由引理 2(1) 可得 $T(1,6,c)$ 不能作为 H 的特殊分支；当 $7\leqslant b\leqslant c$ 时，由引理 2(2) 可得 $T(1,b,c)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.2) $T(2,2,c)$. 由引理 2(3) 可得 $T(2,2,c)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.3) $D_{3,t}(t\geqslant 3)$ 和 $D_{m,1}(m\geqslant 5)$. 由引理 2(4) 可得 $D_{3,t}$ 和 $D_{m,1}$ 均不能作为 H 的特殊分支.

(1.4) $T(2,3,3)$ 和 $D_{4,2}$. 由引理 2(5) 可得 $T(2,3,3)$ 和 $D_{4,2}$ 均不能作为 H 的特殊分支.

(1.5) $T(1,1,n,2,1)$. 由引理 2(6) 可得 $T(1,1,n,2,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.6) $T(1,1,n,3,1)$. 由引理 2(7) 可得 $T(1,1,n,3,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.7) $T(1,1,n,4,1)$. 由引理 2(8) 可得 $T(1,1,n,4,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.8) $T(1,2,n,2,1)$. 由引理 2(9) 可得 $T(1,2,n,2,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.9) $T(1,2,n,3,1)$. 由引理 2(10) 可得 $T(1,2,n,3,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.10) $T(1,3,n,3,1)$. 由引理 2(11) 可得 $T(1,3,n,3,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.11) $T(1,2,n,4,1)$. 由引理 2(12) 可得 $T(1,2,n,4,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.12) $T(1,3,n,4,1)$. 由表 1 知 $M(1,3,11,4,1)=M(1,1,15,5,1)$，但 $\mu(1,3,11,4,1)\nmid\mu(1,1,15,5,1)$. 因此，$T(1,3,11,4,1)$ 不能作为 $T(1,1,15,5,1)$ 的特殊分支. 所以，再由引理 2(13) 可得 $T(1,3,n,4,1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.13) $T(1,4,n,4,1)$. 由表 1 知 $M(1,1,11,5,1)<M(1,4,13,4,1)<M(1,1,10,5,1)$.

因此，由引理2(14)可得 $T(1, 4, n, 4, 1)$ 不能作为 H 的特殊分支.

(1.14) $T(1, b, m, d, 1)(d \geqslant 5, b \geqslant 1, bd > 5)$. 由文献[13]的引理11可得 $T(1, b, m, d, 1)(d \geqslant 5, b \geqslant 1, bd > 5)$ 不能作为 H 的特殊分支. 从而由情形(1.1)－(1.14)知 H 的特殊分支只能为 $T(1, 1, n, 5, 1)$. 再由 $\mu(H) = \mu(1, 1, n, 5, 1)$ 和文献[10]的引理10可得 $H = T(1, 1, n, 5, 1)$.

因此，$T(1, 1, n, 5, 1)(n \geqslant 9)$ 是匹配唯一的.

(2) 当 $1 \leqslant n \leqslant 8$ 时，由引理3、引理4、引理5及定理的条件($n \neq 1,2,4,5,8$)可得 $T(1, 1, n, 5, 1)$ 是匹配唯一的.

定理2 设 $n \geqslant 1$，图 $\overline{T(1, 1, n, 5, 1)}$ 匹配唯一当且仅当 $n \neq 1,2,4,5,8$.

证 由定理1和文献[4]的推论1即可得定理2.

参考文献:

[1] GODSIL C D. Algebraic Combinatorics [M]. New York: Chapman and Hall, 1993.

[2] FARELL E J. An Introduction to Matching Polynomial [J]. Combinatoria Theory, 1979, 27(B): 75－86.

[3] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. North-Holland: Amsterdam, 1976.

[4] 马海成，赵海兴. 小度数或大度数图中的匹配唯一图 [J]. 数学研究与评论，2004，24(2)：369－373.

[5] 申世昌. T-形树的匹配唯一性 [J]. 数学研究，1999，32(1)：86－91.

[6] 李改杨. 几类图的匹配唯一性 [J]. 应用数学，1992，5(3)：53－59.

[7] 郭镜明，郭知熠. 与道路相关图的匹配唯一性 [J]. 同济大学学报：自然科学版，1990，18(3)：373－380.

[8] 郭知熠，曾道智，张建平. 具有度序列(4^1, $2^{(p-1)}$)图的匹配唯一性 [J]. 华中理工大学学报：自然科学版，1990，18(6)：135－140.

[9] MA Hai-cheng, REN Hai-zhen. The New Methods for Constructing Matching-Equivalence Graphs [J]. Discrete Mathematics, 2007, 307: 125－131.

[10] 乔友付，詹福琴. 树 $T(1, 4, n)$ 及其补图的匹配唯一性 [J]. 海南大学学报：自然科学版，2008，26(3)：220－224.

[11] 赵海兴. 图两参数的关系及图的分类 [J]. 青海师范大学学报：自然科学版，1999(1)：1－4.

[12] 马海成. $2 < M(G) \leqslant \sqrt{2+\sqrt{5}}$ 的图 G [J]. 内蒙古大学学报：自然科学版，2005，36(5)：485－487.

[13] 詹福琴，乔友付，赵丽棉. 一类新图的匹配唯一性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(3)：7－11.

[14] 李 乔，冯克勤. 论图的最大特征根 [J]. 应用数学学报，1979，2(2)：167－175.

Necessary and Sufficient Condition for the Matching Uniqueness of a Class of Graphs

QIAO You-fu, ZHAN Fu-qin

Department of Mathematics, Hechi University, Yizhou Guangxi 546300, China

Abstract: Using character and the distribution rules for the maximum real roots of matching polynomials, the authors prove that for $n \geqslant 1$, $T(1, 1, n, 5, 1)$ is matching uniquely if and only if $n \neq 1,2,4,5,8$.

Key words: matching polynomial; matching equivalence; matching uniqueness; character; the maximum real root

责任编辑 廖 坤