第 37 卷　第 4 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2012 年 4 月
Vol. 37　No. 4　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Apr.　2012

文章编号:1000-5471(2012)04-0012-04

非循环子群共轭类个数为 5 的有限幂零群[①]

郭凯艳，　曹洪平，　陈贵云

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：给出了非循环子群共轭类个数为 5 的有限幂零群的分类. 由此，对非循环子群共轭类个数不大于 5 的有限幂零群进行了完全分类.

关　键　词：p-群；幂零群；非循环子群；极大子群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A

众所周知，在群论的研究中，子群的性质对群的结构有着重要的影响. 令 $\delta(G)$ 表示群 G 的非循环子群的共轭类个数. 文献[1] 证明了有限群 G 的非循环子群皆共轭(即 $\delta(G)=1$) 当且仅当 G 为内循环群；文献[2] 给出了所有可解子群 H 皆满足 $\delta(H)\leqslant 2$ 的有限群的完全分类；文献[3] 给出了恰有 4 个非循环子群共轭类的有限幂零群的完全分类.

本文涉及的群均为有限群. 设 G 为群，令 $n(G)$ 表示 G 中子群的个数，Q_n 表示 n 阶广义四元数群，D_n 表示 n 阶广义二面体群，Z_n 表示 n 阶循环群. 文中的术语和符号都是标准的，参见文献[1] 和[4].

引理 1[1]　设 G 是内循环 p-群，即 $\delta(G)=1$，则 G 同构于以下群之一：

(1) $Z_p\times Z_p$；

(2) Q_8.

下面的结论是显然的：

引理 2　设 G 为循环群，$|G|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}$，其中 $p_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是互不相同的素数，α_i $(i=1,2,\cdots,t)$ 是正整数，则 $n(G)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_t+1)$，并且 $n(G)=2$ 当且仅当 $|G|=p$，$n(G)=3$ 当且仅当 $|G|=p^2$，$n(G)=4$ 当且仅当 $|G|=p^3,pq$，$n(G)=5$ 当且仅当 $|G|=p^4$，其中 p,q 是互不相同的素数.

引理 3　设 G 为幂零群. 若 G 中有两个非循环的 Sylow 子群，则 $\delta(G)>5$.

证　由假设，$G=P_1\times P_2\times\cdots\times P_t$，其中 P_i $(i=1,2,\cdots,t)$ 是 G 的 Sylow p_i-子群，且 $t\geqslant 2$. 不妨设 P_1,P_2 是 G 的两个非循环的 Sylow 子群，则 $|P_1|\geqslant p_1^2$，$|P_2|\geqslant p_2^2$.

下面分 $|\pi(G)|=2$ 和 $|\pi(G)|>2$ 两种情况进行讨论.

若 $|\pi(G)|=2$，则 $G=P_1\times P_2$.

假设 $|P_1|=p_1^2$ 且 $|P_2|=p_2^2$，则 $G\cong Z_{p_1}\times Z_{p_1}\times Z_{p_2}\times Z_{p_2}$. 由 $n(Z_{p_2}\times Z_{p_2})=1+p_2+1+1\geqslant 5$ 知，

---

① 收稿日期：2010-12-01

基金项目：国家自然科学基金项目(10771172).

作者简介：郭凯艳(1987-)，女，山西长治人，硕士研究生，主要从事有限群论的研究.

通信作者：曹洪平.

G 中包含 P_1 的非循环子群的共轭类个数不小于 5；同理，G 中包含 P_2 的非循环子群的共轭类个数不小于 5. 从而 $\delta(G) > 5$.

假设 $|P_1| \geqslant p_1^2$ 且 $|P_2| > p_2^2$，由 P_2 中不同阶子群的个数至少为 4 知，G 中包含 P_1 的非循环子群的共轭类个数不小于 4；又由 P_1 中不同阶子群的个数至少为 3 知，G 中包含 P_2 的非循环子群的共轭类个数不小于 3. 故 $\delta(G) > 5$.

同理，假设 $|P_1| > p_1^2$ 且 $|P_2| \geqslant p_2^2$，我们有 $\delta(G) > 5$.

若 $|\pi(G)| > 2$，则 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$，其中 P_1, P_2 为非循环群，$|P_1| \geqslant p_1^2$，$|P_2| \geqslant p_2^2$，$t \geqslant 3$. 由于 $P_2 \times \cdots \times P_t$ 中不同阶子群的个数至少为 6，所以 G 中包含 P_1 的非循环子群的共轭类个数不小于 6，故 $\delta(G) > 5$.

定理 1　设 G 为幂零群，$|\pi(G)| \geqslant 2$，$\delta(G) = 3$，则 G 同构于以下群之一：

(1) $Z_p \times Z_p \times Z_{q^2}$；

(2) $Q_8 \times Z_{q^2}$.

证　由假设，$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$，其中 P_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$ 是 G 的 Sylow p_i-子群，$t \geqslant 2$. 若 P_i 皆为循环群，则 G 为循环群，与 $\delta(G) = 3$ 矛盾，故 G 中存在非循环的 Sylow 子群. 由引理 3 知，G 中只有一个非循环的 Sylow 子群，不妨设为 P_1. 则 $G = P_1 \times K$，K 为循环群，$(|P_1|, |K|) = 1$，$|K| > 1$. 由 $\delta(G) = 3$ 及 $|K| > 1$ 知 $\delta(P_1) = 1$，$n(K) = 3$. 由引理 1 及引理 2 知，$P_1 \cong Z_p \times Z_p, Q_8$ 且 $K \cong Z_{q^2}$，故 $G \cong Z_p \times Z_p \times Z_{q^2}$，或 $G \cong Q_8 \times Z_{q^2}$.

下面的结论在文献[3] 中已被证明，在这里，我们给出一个新的且简单的证明.

定理 2　设 G 为幂零群，$|\pi(G)| \geqslant 2$，$\delta(G) = 4$，则 G 同构于以下群之一：

(1) $Z_p \times Z_p \times Z_{q^3}$；

(2) $Z_p \times Z_p \times Z_q \times Z_r$；

(3) $Q_8 \times Z_{q^3}$；

(4) $Q_8 \times Z_q \times Z_r$；

(5) $Z_{p^2} \times Z_p \times Z_q$；

(6) $\langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle \times Z_q (p > 2)$.

证　因为 G 为幂零群，所以 G 可分解为 Sylow 子群的直积. 设 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t$，其中 P_i $(i = 1, 2, \cdots, t)$ 是 G 的 Sylow p_i-子群，$t \geqslant 2$. 若 P_i 皆为循环群，则 G 为循环群，与 $\delta(G) = 4$ 矛盾，故 G 中存在非循环的 Sylow 子群. 由引理 3 知，G 中只有一个非循环的 Sylow 子群，不妨设为 P_1，则 $G = P_1 \times K$，K 为循环群，$(|P_1|, |K|) = 1$，$|K| > 1$. 由 $\delta(G) = 4$ 及 $|K| > 1$ 知 $\delta(P_1) = 1$，$n(K) = 4$，或 $\delta(P_1) = 2$，$n(K) = 2$. 当 $\delta(P_1) = 1$，$n(k) = 4$ 时，由引理 1 及引理 2 知，$P_1 \cong Z_p \times Z_p, Q_8$ 且 $K \cong Z_{q^3}, Z_q \times Z_r$，故 $G \cong Z_p \times Z_p \times Z_{q^3}, Z_p \times Z_p \times Z_q \times Z_r, Q_8 \times Z_{q^3}, Q_8 \times Z_q \times Z_r$；当 $\delta(P_1) = 2$，$n(k) = 2$ 时，由文献[2] 的定理 3.1 及引理 2 知，$P_1 \cong Z_{p^2} \times Z_p$，或 $P_1 \cong \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle$，其中 $p > 2$，$K \cong Z_q$. 于是 $G \cong Z_{p^2} \times Z_p \times Z_q$，或 $G \cong \langle a, b \mid a^{p^2} = b^p = 1, a^b = a^{1+p} \rangle \times Z_q$，其中 $p > 2$.

定理 3　设 G 是 p-群，$\delta(G) = 5$，则 G 同构于以下群之一：

(1) $\langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1, [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = 1 \rangle$；

(2) $Z_{p^5} \times Z_p$；

(3) $\langle a, b \mid a^{p^5} = b^p = 1, a^b = a^{1+p^4} \rangle$；

(4) $\langle a, b \mid a^{16} = 1, b^2 = a^8, a^b = a^{-1} \rangle = Q_{32}$；

(5) $\langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, a^b = a^{-1} \rangle = D_{16}$.

证　因为 p-群的每个极大子群都正规，所以 G 的每个极大子群构成一个共轭类. 设 $M_1, M_2, \cdots, M_s$ 是

G 的所有极大子群. 若 $s=1$，则 G 为循环群，矛盾. 又由于 p-群不可能恰含两个极大子群，所以 $s\geqslant 3$.

若 G 的极大子群皆为非循环群，则由 $\delta(G)=5$ 知 $s\leqslant 4$. 假设 $s=3$，且不失一般性设 $\delta(M_1)=\delta(M_2)=1$，$\delta(M_3)=2$. 由于只有 3 个极大子群的 p-群必为二元生成的 2-群，所以 $p=2$. 由文献[2]的定理 3.1 知 $M_3\cong Z_4\times Z_2$，且由引理 1 及 p-群 G 的极大子群的阶相同知 $Q_8\cong M_1, M_2$，故 $|G|=16$，G 是二元生成的 16 阶群，且 G 无循环极大子群. 由此可得，$G\cong Z_4\times Z_4$，$\langle a, b \mid a^4=b^4=1, a^b=a^{-1}\rangle$，或 $G\cong\langle a, b\mid a^4=b^4=1, (ab)^2=1, ab^3=ba^3\rangle$，但这 3 种群的极大子群 $\langle a, b^2\rangle$ 与 $\langle a^2, b\rangle$ 都同构于 $Z_4\times Z_2$，矛盾. 故 $s=4$，$\delta(M_i)=1$ $(i=1,2,3,4)$. 由引理 1 及只有 4 个极大子群的 p-群必为 3-群知 $M_i\cong Z_3\times Z_3$. 故 $|G|=3^3$，且 G 无循环极大子群. 从而我们有 $G\cong Z_3\times Z_3\times Z_3$，或 $G\cong\langle a, b, c\mid a^3=b^3=c^3=1, [a, b]=c, [a, c]=[b, c]=1\rangle$. 对于前一种群，极大子群的个数为 $1+p+p^2=13$，矛盾；对于后一种群，极大子群的个数为 $1+p=4$，且都为非循环群，满足假设，从而 G 为定理 3 中的情形(1).

若 G 中存在循环极大子群，由于 G 不为循环群，G 为文献[4]的定理 5.14 中的情形(Ⅱ)-(Ⅶ).

对于情形(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅵ)，若 $n>2$，G 只有一个非循环的极大子群 $M=\langle a^p, b\rangle$，且 $M\cong Z_{p^{n-2}}\times Z_p$. 由于 $\delta(G)=5$，所以 $\delta(M)=4$，由文献[3]的定理 2 知 $M\cong Z_{p^4}\times Z_p$，故 $n=6$，G 为定理 3 中的情形(2)和(3)；反之，情形(2)和(3)中的群 G 满足 $\delta(G)=5$.

对于情形(Ⅳ)，若 $n>3$，G 只有两个非循环的极大子群 $M_1=\langle a^2, b\rangle$，$M_2=\langle a^2, ab\rangle$，且 $M_1\cong M_2\cong Q_{2^{n-1}}$；若 $n=4$，则 $M_1\cong M_2\cong Q_8$，$\delta(M_1)=\delta(M_2)=1$，矛盾；若 $n=5$，则 $M_1\cong M_2\cong Q_{16}$，且 $\delta(M_1)=\delta(M_2)=3$，$H_1=\langle a^4, b\rangle$，$H_2=\langle a^4, a^2b\rangle$，$H_3=\langle a^4, ab\rangle$ 与 $H_4=\langle a^4, a^3b\rangle$ 都同构于 Q_8，且 $H_2^a=H_1$，$H_4^a=H_3$，此时 $\delta(G)=5$ 且 $G\cong Q_{32}$ 为定理 3 中的情形(4)；若 $n=6$，则 $M_1\cong M_2\cong Q_{32}$，$\delta(M_1)=\delta(M_2)=5$，矛盾；若 $n>6$，同理得出矛盾.

对于情形(Ⅴ)，G 只有两个非循环的极大子群 $M_1=\langle a^2, b\rangle$，$M_2=\langle a^2, ab\rangle$，且 $M_1\cong M_2\cong D_{2^{n-1}}$. 若 $n=3$，则 $M_1\cong M_2\cong Z_2\times Z_2$，$\delta(M_1)=\delta(M_2)=1$，矛盾；若 $n=4$，则 $M_1\cong M_2\cong D_8$，$\delta(M_1)=\delta(M_2)=3$，且 $H_1=\langle a^4, b\rangle$，$H_2=\langle a^4, a^2b\rangle$，$H_3=\langle a^4, ab\rangle$ 与 $H_4=\langle a^4, a^3b\rangle$ 都同构于 $Z_2\times Z_2$，且 $H_2^a=H_1$，$H_4^a=H_3$，故 $\delta(G)=5$，此时 $G\cong D_{16}$ 为定理 3 中的情形(5)；若 $n=5$，则 $M_1\cong M_2\cong D_{16}$，$\delta(M_1)=\delta(M_2)=5$，矛盾；若 $n>5$，同理得出矛盾.

对于情形(Ⅶ)，G 只有两个非循环的极大子群 $M_1=\langle a^2, b\rangle$，$M_2=\langle a^2, ab\rangle$，且 $M_1\cong D_{2^{n-1}}$，$M_2\cong Q_{2^{n-1}}$. 若 $n=4$，则 $G\cong\langle a, b\mid a^8=b^2=1, a^b=a^3\rangle$，由文献[3]的定理 2 知 $\delta(G)=4$，矛盾；若 $n=5$，则 $M_1\cong D_{16}$，$M_2\cong Q_{16}$，$\delta(M_1)=5$，矛盾；若 $n>5$，同理得出矛盾. 定理 3 得证.

定理 4 设 G 是幂零群，$|\pi(G)|\geqslant 2$，$\delta(G)=5$，则 G 同构于以下群之一：

(1) $Z_p\times Z_p\times Z_{q^4}$，其中 p, q 为不同的素数；

(2) $Q_8\times Z_{q^4}$，其中 q 为素数，且 $q>2$.

证 由假设，$G=P_1\times P_2\times\cdots\times P_t$，其中 $P_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是 G 的 Sylow p_i-子群，$t\geqslant 2$. 若 P_i 皆为循环群，则 G 为循环群，与 $\delta(G)=5$ 矛盾，故 G 中存在非循环的 Sylow 子群. 由引理 3 知，G 中只有一个非循环的 Sylow 子群，不妨设为 P_1，则 $G=P_1\times K$，K 为循环群，$(|P_1|, |K|)=1$，$|K|>1$. 由 $\delta(G)=5$ 及 $|K|>1$ 知 $\delta(P_1)=1$，$n(K)=5$. 由引理 1 及引理 2 知，$P_1\cong Z_p\times Z_p, Q_8$，$K\cong Z_{q^4}$，故 $G\cong Z_p\times Z_p\times Z_{q^4}, Q_8\times Z_{q^4}$. 定理 4 得证.

定理 5 设 G 是有限幂零群. 如果 $\delta(G)=5$，则 G 同构于以下群之一：

(1) $\langle a, b, c\mid a^3=b^3=c^3=1, [a, b]=c, [a, c]=[b, c]=1\rangle$；

(2) $Z_{p^5}\times Z_p$；

(3) $\langle a, b\mid a^{p^5}=b^p=1, a^b=a^{1+p^4}\rangle$；

(4) $\langle a, b\mid a^{16}=1, b^2=a^8, a^b=a^{-1}\rangle=Q_{32}$；

(5) $\langle a, b\mid a^8=b^2=1, a^b=a^{-1}\rangle=D_{16}$；

(6) $Z_p \times Z_p \times Z_{q^4}$，其中 p,q 为不同的素数；

(7) $Q_8 \times Z_{q^4}$，其中 q 为素数，且 $q > 2$.

证　由定理 3 和定理 4，定理 5 得证.

参考文献：

[1] HUPPERT B. Endiche Gruppen I [M]. New York：Spring-Verlag，1967.

[2] LI Shi-rong，ZHAO Xu-bo. Finite Group with Few Non-cyclic Subgroups [J]. Journal of Group Theory，2007(10)：225－233.

[3] 孟　伟，卢家宽，李世荣. 恰有 4 个非循环子群共轭类的有限幂零群 [J]. 广西大学学报：自然科学版，2009，34(6)：485－488.

[4] 徐明耀. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1999.

[5] 周　伟，赖　萍. 非循环群的一个特征性质 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2000，25(3)：213－215.

[6] 胡接春，陈贵云. 极大交换子群的阶对群的结构的影响 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(10)：106－108.

[7] 李方方，曹洪平. 子群的性质对有限群结构的影响 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2008，30(8)：5－8.

Finite Nilpotent Groups with 5 Conjugacy Classes of Noncyclic Subgroups

GUO Kai-yan，　CAO Hong-ping，　CHEN Gui-yun

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：The finite nilpotent groups with 5 conjugacy classes of noncyclic subgroups are completely classified, from which one can give the structure of all finite nilpotent groups with the number of conjugacy classes of noncyclic subgroups at most 5.

Key words：p-group；nilpotent group；noncyclic subgroup；maximal subgroup

责任编辑　廖　坤