第 37 卷 第 4 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2012 年 4 月
Vol. 37 No. 4 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Apr. 2012

文章编号:1000-5471(2012)04-0009-03

关于最高阶元个数为 $10pq$ 的有限群①

何立官[1,2], 陈贵云[1]

1. 西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715; 2. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 400047

摘要: 讨论了最高阶元素个数为 $10pq$ 的有限群, 其中 p, q 为不小于 5 的素数. 证明了: 对于适当的 p, q, 这类群是可解群.

关 键 词: 最高阶元的个数; 有限群; 可解群; 阶

中图分类号: O152.1 **文献标志码**: A

本文所讨论的群均为有限群, $\pi_e(G)$ 表示群 G 中元素阶的集合, k 是 $\pi_e(G)$ 中的最大值, n 表示 G 中 k 阶循环子群的个数. i 是自然数, $\pi(i)$ 是 i 的相异素因子的集合, $\pi(G)=\pi(|G|)$. $M_i(G)$ 是 G 的 i 阶元素的集合, $M(G)=M_k(G)$. $P_r(G)$ 是 G 的 r-Sylow 子群, $r\in\pi(G)$, $\varphi(x)$ 为欧拉函数. 其余符号及术语是标准的.

1987 年, Thompson 提出如下猜想(此猜想于 1987 年澳大利亚国际会议上由施武杰教授公开):

Thompson 猜想 设 G_1 与 G_2 为有限群, 且 $|M_i(G_1)|=|M_i(G_2)|$ $(i=1,2,\cdots)$. 如果 G_1 可解, 则 G_2 可解.

对于此猜想, 目前还没有一般方法给出完整的证明, 但文献[1-3]从研究最高阶元的个数与有限群的可解性入手, 证明了该猜想在一些特殊条件下是成立的. 本文讨论了最高阶元的个数为 $|M(G)|=10pq$ 的情况, 得到了以下定理:

定理 1 设 G 为有限群, p, q 为不小于 5 的素数. 如果 $|M(G)|=10pq$, 且 p, q 满足下列条件之一:

(1°) $p=q$;

(2°) $p\neq q$, 当 $2q+1$ 为素数时有 $2q+1>5p$, 当 $2p+1$ 为素数时有 $2p+1>5q$; 进一步, 如果 $p>q$, 当 $10q+1$ 是素数时有 $10q+1>p$.

则 G 可解.

证 由文献[1]知, 如果 $|M(G)|=10pq$ (p, q 为不小于 5 的素数), 则 $n, \varphi(k)$ 和 k 的值如表 1.

表 1 $n, \varphi(k)$ 和 k 的值

n	1	5	p	q	$5p$	$5q$	pq	$5pq$	$10pq$
$\varphi(k)$	$10pq$	$2pq$	$10q$	$10p$	$2q$	$2p$	10	2	1
k	$r_1, 2r_1$	$r_2, 2r_2$	$r_3, 2r_3$	$r_4, 2r_4$	$r_5, 2r_5$	$r_6, 2r_6$	11, 22	3, 4, 6	2

其中 $r_1=10pq+1$, $r_2=2pq+1$, $r_3=10q+1$, $r_4=10p+1$, $r_5=2q+1$, $r_6=2p+1$ 均为素数.

现在根据 n 可能的取值情况进行证明.

① 收稿日期: 2011-03-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11001226, 11171364); 重庆市科委自然科学基金计划资助项目(cstc2011jjA00020, 2010BB9318); 重庆教委科技项目(KJ110609, KJ110614).

作者简介: 何立官(1979-), 男, 贵州沿河人, 博士研究生, 主要从事有限群的研究.

通信作者: 陈贵云, 教授, 博士生导师.

情形1　当 $n=1$ 时，$\varphi(k)=10pq$. 由文献[1]知 G 超可解.

情形2　当 $n=5$ 时，$\varphi(k)=2pq$. 此时 $k=2pq+1$ 或 $k=2(2pq+1)$，其中 $2pq+1$ 为素数. 设 $2pq+1=r$，则 $r\geqslant 53$. 取 G 中最高阶元为 a，有 $o(a)=r$ 或 $o(a)=2r$. 于是有

$$|G|=|G:N_G(\langle a\rangle)|\cdot|N_G(\langle a\rangle):C_G(\langle a\rangle)|\cdot|C_G(\langle a\rangle)| \tag{1}$$

由于 a 为最高阶元，故有 $\pi|C_G(\langle a\rangle)|=\pi(k)$，$C_G(\langle a\rangle)$ 为 r-群或 $(2,r)$-群. 由 N/C 定理知 $|N_G(\langle a\rangle):C_G(\langle a\rangle)|\,\big|\,2pq$. 设 $l=|G:N_G(\langle a\rangle)|$. 如果 $l<5$，则 $\pi(l)\subseteq\{2,p,q,r\}$，否则，设有 $l'\in\pi(l)$ 但 $l'\notin\{2,p,q,r\}$，显然有 $l'\in\pi(G)$. 但同时我们可以取 G 中另一 k 阶元 a_1，使得 $l'\nmid|G:N_G(\langle a_1\rangle)|$，否则对 G 中任何 k 阶元 a 都有 $l'\,\big|\,|G:N_G(\langle a\rangle)|$，则 $l'\mid 5$. 由 5 为素数知只有 $l'=5$，矛盾于 $l<5$. 因此有 $l'\notin\pi(G)$，矛盾. 所以由(1)式知 $\pi(G)\subseteq\{2,p,q,r\}$. 由文献[4-5]知 G 可解. 如果 $l=5$，则由(1)式知 $\pi(G)\subseteq\{2,5,p,q,r\}$. 设 $|G|=2^u\cdot 5\cdot p^v\cdot q^s\cdot r^t$. 作 G 在 $N_G(\langle a\rangle)$ 上的陪集置换表示 ϕ，则 $G/\ker\phi\lesssim S_5$. 由 $5<r$ 知 $\pi(|G/\ker\phi|)\subset\{2,5\}$，$G/\ker\phi$ 可解. 而 $\pi(\ker\phi)\subset\{2,p,q,r\}$，$\ker\phi$ 也可解，从而 G 可解.

情形3　当 $n=p$ 时，$\varphi(k)=10q$. 此时 $k=10q+1$ 或 $k=2(10q+1)$，其中 $10q+1$ 为素数. 设 $10q+1=r$，则 $r\geqslant 53$. 设 $l=|G:N_G(\langle a\rangle)|$. 如果 $l<p$，易知 $\pi(l)\subseteq\{2,5,q,r\}$，于是由(1)式知 $\pi(G)\subseteq\{2,5,q,r\}$，$G$ 可解；如果 $l=p$，那么 $\pi(G)\subseteq\{2,5,p,q,r\}$，如果 $q=p$，则 $\pi(G)\subseteq\{2,5,p,r\}$，$G$ 可解，不妨设 $p\neq q$，由(1)式可设 $|G|=2^u\cdot 5^v\cdot p\cdot q^s\cdot r^t$. 作 G 在 $N_G(\langle a\rangle)$ 上的陪集置换表示 ϕ，则 $G/\ker\phi\lesssim S_p$. 如果 $p<q$，那么 $5\leqslant p<q<r$，故 $\pi(|G/\ker\phi|)\subset\{2,5,p\}$，$G/\ker\phi$ 可解，而 $\pi(\ker\phi)\subset\{2,5,q,r\}$，$\ker\phi$ 可解，于是 G 可解；如果 $p>q$，则由已知 $r=10p+1>p$，从而 $\pi(|G/\ker\phi|)\subset\{2,5,q,p\}$，$\pi(\ker\phi)\subset\{2,5,q,r\}$，仍然可以得出 G 可解.

情形4　当 $n=q$ 时，$\varphi(k)=10p$. 类似情形3的讨论知 G 可解.

情形5　当 $n=5p$ 时，$\varphi(k)=2q$. 此时 $k=2q+1$ 或 $k=2(2q+1)$，其中 $2q+1$ 为素数. 设 $2q+1=r$，则 $r\geqslant 11$. 设 $l=|G:N_G(\langle a\rangle)|$. 当 $l<5p$ 时，类似情形3的讨论知 G 可解. 设 $l=5p$. 此时 $\pi(G)\subseteq\{2,5,p,q,r\}$. 若 $p=q$，则 $\pi(G)\subseteq\{2,5,q,r\}$，从而 G 可解. 于是设 $p\neq q$. 因为 $2q+1$ 为素数，根据假设条件知 $r=2q+1>5p$. 由(1)式可设 $|G|=2^u\cdot 5\cdot p\cdot q^s\cdot r^t$. 作 G 在 $N_G(\langle a\rangle)$ 上的陪集置换表示 ϕ，则 $G/\ker\phi\lesssim S_{5p}$. 由 $5p<r$ 知 $\pi(|G/\ker\phi|)\subset\{2,5,p,q\}$，$G/\ker\phi$ 可解. 而 $\pi(\ker\phi)\subset\{2,q,r\}$，即 $\ker\phi$ 可解，于是 G 可解.

情形6　当 $n=5q$ 时，$\varphi(k)=2p$. 类似于情形5的讨论知 G 可解.

情形7　当 $n=pq$ 时，$\varphi(k)=10$. 此时 $k=11$ 或 $k=22$. 设 $l=|G:N_G(\langle a\rangle)|$. 用类似情形3的讨论知，如果 $l<pq$，那么 G 可解. 设 $l=pq$，则 $\pi(G)\subseteq\{2,5,11,p,q\}$. 因为 G 的最高阶元素的阶为11或22，所以 $|G|$ 的素因子不能大于22. 故 p,q 只能取5,7,11,13,17或19. 若 $p=q$，则 $\pi(G)\subset\{2,5,11,p\}$，$G$ 可解. 设 $p<q$. 若 $p\in\{2,5,11\}$ 或 $q\in\{2,5,11\}$，则 $\pi(G)\subset\{2,5,11,q\}$ 或 $\pi(G)\subset\{2,5,11,p\}$，$G$ 可解. 因此可设 $13\leqslant p<q$. 有下面3种情况：$p=13$，$q=17$；$p=13$，$q=19$；$p=17$，$q=19$.

设 $p=13$，$q=17$，此时 $|M(G)|=2\ 210$. 设 $|C_G(\langle a\rangle)|=2^u\cdot 11^v$，其中 a 为 G 的最高阶元. 如果 $u>7$，则 $C_G(\langle a\rangle)$ 中有 $(2^8-1)\times 10=2\ 550$ 个22阶元，矛盾；如果 $v>3$，则 $C_G(\langle a\rangle)$ 中有 $(11^4-1)=14\ 640$ 个22阶元，矛盾. 于是 $|C_G(\langle a\rangle)|=2^u\cdot 11^v(u\leqslant 7,v\leqslant 3)$，$|G|=2^\alpha\cdot 5\cdot 11^\beta\cdot 13\cdot 17\ (\alpha\leqslant 8,\beta\leqslant 3)$. 由文献[6]知 G 可解. 同理可以证明当 $p=13$，$q=19$ 及 $p=17$，$q=19$ 时，G 可解.

情形8　当 $n=5pq$ 时，$\varphi(k)=2$，$k=3,4,6$. 若 G 不可解，则必有 $5\in\pi(G)$，故 $k=6$. 因此有 $\pi_e(G)=\{1,2,3,5,6\}$ 或者 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6\}$. 由文献[7]知只需讨论 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的情况.

若 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6\}$，则可断言 $|M(G)|\neq 10pq$. 因为 $\pi_e(G)=\{1,2,3,4,5,6\}$，由文献[8]知 G 同构于下述几种群之一：S_5，S_6，$G/O_2(G)\cong A_5$，其中 $|O_2(G)|=2^{4l}$，$\exp(P_2(G))\mid 4$.

若 $G\cong S_5$，则 $|M(G)|=20\neq 10pq$；若 $G\cong S_6$，则 $|M(G)|=240\neq 10pq$. 故设 $G/O_2(G)\cong A_5$，从

而有 $|G|=2^{\alpha}\cdot 3\cdot 5$，$|P_3(G)|=3$. 由 N/C 定理知 $N_G(P_3(G))/C_G(P_3(G))\lesssim \mathrm{Aut}(P_3(G))$. 若 $N_G(P_3(G))=C_G(P_3(G))$，由 Burnside 定理知 G 可解，与假设矛盾. 于是 $|N_G(P_3(G))/C_G(P_3(G))|=2$. 设 $r=3$，$\alpha=2$，由文献[1] 有 $P_3(G)_{pc-r}G$（即 G 可迁地作用在 $P_3(G)$ 上）. 又由 Sylow 定理知 G 共轭可迁地作用在 $M_3(G)$ 上. 再由 $k=3\times 2$，$r_1=3$，$r_2=2$ 及文献[1] 知 $|M(G)|=|M_3(G)||M_2(C_G(a))|$，其中 $a\in P_3(G)$，$a\neq 1$. 从而 $|M(G)|=2n_1|M_2(C_G(a))|=10pq$，其中 n_1 为 G 的 3-Sylow 子群的个数. 由 $P_3(G)$ 在 G 中非正规知 $n_1>1$. 于是由 $2n_1|M_2(C_G(a))|=10pq$ 知 $n_1=5,p,q,5p,5q,pq,5pq$. 因为 $n_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$，所以 $n_1\neq 5$. 设 $n_1=p$ 或 $n_1=q$，若 $p>5$ 或 $q>5$，则 G 有阶大于 6 的元，矛盾；若 $p,q=5$，与 $n_1\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3)$ 矛盾. 设 $n_1=5p,5q,pq,5pq$，如果 $p>5$ 或 $q>5$，则 G 有阶大于 6 的元，矛盾；如果 $p,q=5$，则 $25\,\Big|\,|G|$，矛盾. 所以 G 可解.

情形 9　当 $n=10pq$ 时，$\varphi(k)=1$，$k=2$. 此时 G 为初等 Able-2 群，G 中最大阶元素的个数为 $2^{v}-1$，是奇数，矛盾. 证毕.

作为定理 1 的推论，我们有：

定理 2　设 G 为有限群，p,q 为不小于 5 的素数. 如果 $|M(G)|=10pq$，且 p,q 满足下列条件之一：

（1°）$p=q$；

（2°）$p\neq q$，当 $2q+1$ 为素数时有 $2q+1>5p$，当 $2p+1$ 为素数时有 $2p+1>5q$；进一步，如果 $p>q$，当 $10q+1$ 是素数时有 $10q+1>p$.

则 Thompson 猜想成立.

参考文献：

[1] 杨　成. 最高阶元素个数不同的有限群 [J]. 数学年刊：A 辑，1993，14(5)：561－576.

[2] 何立官，陈贵云. 最高阶元素个数为 $10p^{m}$ 的有限群是可解群 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2007，29(6)：1－4.

[3] 韩章家，陈贵云. 最高阶元素个数为 $2pq$ 的有限群可解 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2004，29(2)：198－200.

[4] 施武杰. 关于单 K_3 群 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，1988(3)：1－3.

[5] 施武杰. 关于单 K_4 群 [J]. 科学通报，1991，17：1281－1283.

[6] 陈重穆. 内外 Σ 群与极小非 Σ 群 [M]. 重庆：西南师范大学出版社，1988.

[7] 杨　成. $\pi_e(G)=\{1,2,3,5,6\}$ 的有限群 [J]. 工程数学学报，2000，17(4)：105－108.

[8] BRANDL R，SHI Wu-jie. Finite Groups Whose Elements Order are Consecutive Integers [J]. J Alg，1991，143(2)：388－400.

On Finite Groups with $10pq$ Elements of Maximal Order

HE Li-guan[1,2]，　CHEN Gui-yun[1]

1. School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China；

2. School of Mathematics，Chongqing Normal University，Chongqing 400047，China

Abstract：Finite groups with $10pq$ elements of maximal order for primes $p,q\geqslant 5$ with some special restrictions are investigated. It has been proved that such kinds of groups are solvable.

Key words：the number of the elements with maximal order；finite group；solvable group；order

责任编辑　廖　坤