文章编号:1000-5471(2012)04-0005-04

Sylow 子群的 *M*-可补性对有限群结构的影响①

普昭年[1]，　汤菊萍[2]

1. 河西学院 数学与统计学院，甘肃 张掖 734000；2. 扬州大学 数学科学学院，江苏 扬州 225002

摘要： 对于群 G 的子群 H，若存在 G 的子群 B，使得 $G=HB$，且对 H 的任意极大子群 H_1，H_1B 为 G 的真子群，则称 H 在 G 中是 M-可补的. 利用群 G 的 Sylow 子群在其正规化子中的 M-可补性，得到了有关 p-幂零性和群系的一些结论.

关　键　词： 有限群；M-可补子群；p-幂零群；Sylow 子群；正规化子

中图分类号： O152.1　　**文献标志码：** A

Sylow 子群的可补性质对有限群的结构有着重要的影响，利用可补性可以对有限群的结构和性质进行广泛而深入的研究. 文献[1]利用群 G 的任意 Sylow 子群的可补性得出了 G 可解的充要条件后，许多学者在此基础上对有限群的结构探索出了许多新的结果. 文献[2]证明了：若群 G 的 Sylow 子群的极大子群在 G 中正规，则 G 为超可解的；文献[3]推广了文献[2]的结论，引进了 c-可补子群的概念，并利用准素子群的 c-可补性研究了超可解群和 p-幂零群的结构；文献[4]将子群 c-正规的条件减弱，并引进了 s-正规子群的概念；文献[5]研究了 Sylow 子群的极大子群在局部子群中的 π-拟正规性；文献[6]提出了 M-可补子群的概念，对有限群类特别是包含超可解群的饱和群系的结构进行了研究. 本文在上述基础上，利用 Sylow 子群在局部子群中的 M-可补性对 p-幂零群、p-超可解群的结构进行了进一步探索，得到了一些新结果.

本文所涉及到的群皆为有限群，所用术语和符号都是标准的，可参见文献[7].

1　预备知识

定义 1[8]　设 H 为群 G 的子群，若存在 G 的子群 B，使得 $G=HB$，且对 H 的任意极大子群 H_1，H_1B 是 G 的真子群，则称子群 H 在 G 中是 M-可补的.

群系、饱和群系等相关概念见文献[9]，不难知道 p-幂零群系、幂零群系、p-超可解群系、超可解群系都是饱和群系.

引理 1[8]　设 G 是有限群，则

(1) 若 $H\leqslant K\leqslant G$，且 H 在 G 中 M-可补，则 H 也在 K 中 M-可补；

(2) 令 $N\lhd G$ 且 $N\leqslant H\leqslant G$，若 H 在 G 中 M-可补，则 H/N 在 G/N 中 M-可补；

(3) 令 π 是一个素数集，设 K 是 G 的正规 π'-子群，且 H 是 G 的 π-子群，那么 H 在 G 中 M-可补当且仅当 HK/K 在 G/K 中 M-可补.

---

① 收稿日期：2011-05-10
基金项目：国家自然科学基金(10901133).
作者简介：普昭年(1964-)，男，甘肃张掖人，副教授，主要从事代数教学的研究.

引理 2[9]　设 H 在有限群 G 中 s-拟正规，则

(1) 如果 K 是 G 的子群，且使得 $H \leqslant K$，那么 H 在 K 中是 s-拟正规的；

(2) 如果 N 是 G 的正规子群，那么 HN/N 在 G/N 中是 s-拟正规的.

2　主要结果

定理 1　设 G 是有限群，p 为 $|G|$ 的极小素因子，P 为 G 的 Sylow p-子群，若 P 在 $N_G(P)$ 中 M-可补，且 P 的导群 P' 在 G 中 s-拟正规，那么 G 是 p-幂零群.

证　假设 G 是最小阶反例，我们有：

(1) $O_{p'}(G)=1$.

事实上，若 $O_{p'}(G)\neq 1$，我们考虑商群 $G/O_{p'}(G)$，易知 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 是 $G/O_{p'}(G)$ 的 Sylow p-子群. 由引理 1(3) 知 $PO_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 在 $N_{G/O_{p'}(G)}(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G))=N_G(P)O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 中 M-可补. 再由 $(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G))'=P'O_{p'}(G)/O_{p'}(G)$ 及引理 2(2) 知 $(PO_{p'}(G)/O_{p'}(G))'$ 在 $G/O_{p'}(G)$ 中 s-拟正规，即 $G/O_{p'}(G)$ 满足定理 1 的假设. 由 G 的选择知 $G/O_{p'}(G)$ 是 p-幂零的，从而 G 是 p-幂零群，矛盾.

(2) 若 M 为 G 的真子群，且 $P\leqslant M<G$，则 M 是 p-幂零的.

由于 $N_M(P)=N_G(P)\cap M\leqslant N_G(P)$，由引理 1(1) 知 P 在 $N_M(P)$ 中 M-可补. 又因 P' 在 M 中 s-拟正规，由 G 的选择知 M 为 p-幂零群.

(3) $O_p(G)\neq 1$，G 是 p-可解的，并且 $C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$.

对任意的 $Q_1\in \mathrm{Syl}_q(N_G(P))$，其中 $q\neq p$，有 $PQ_1\leqslant N_G(P)$. 若 $PQ_1=G$，则 $N_G(P)=G$，由文献[10] 中的定理 3 知 G 是 p-幂零群，矛盾，从而 $N_G(P)<G$. 由步骤(2) 知 $N_G(P)$ 是 p-幂零的，从而 PQ_1 也是 p-幂零的. 另一方面，由 $P\trianglelefteq N_G(P)$ 知 $PQ_1=P\times Q_1$，即 $Q_1\leqslant C_G(P)$. 由 Burnside 定理，若 P 为交换群，则 G 是 p-幂零群，矛盾，故 $P'\neq 1$. 由于 P' 在 G 中 s-拟正规，从而 $P'\trianglelefteq G$ 且 $P'\leqslant O_p(G)$，故 $O_p(G)\neq 1$. 由于 $(P/O_p(G))'=P'O_p(G)/O_p(G)$，易知 $G/O_p(G)$ 满足定理 1 的假设，从而由 G 的选取知 $G/O_p(G)$ 是 p-幂零的，故 G 是 p-可解群. 由文献[11] 及步骤(1) 知 $C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$.

(4) $G=PQ$，其中 Q 为 G 的 Sylow q-子群，并且 $q\neq p$.

由于 G 是 p-可解的，从而对任意 $q\in\pi(G)$，存在 Sylow q-子群 Q，使得 PQ 为 G 的子群. 若 $PQ<G$，则由步骤(2) 知 PQ 是 p-幂零的，因此 $Q\trianglelefteq PQ$. 又因为 $O_p(G)\trianglelefteq PQ$，所以 $O_p(G)Q=O_p(G)\times Q$，即 $Q\leqslant C_G(O_p(G))$. 又由步骤(3)，$C_G(O_p(G))\leqslant O_p(G)$，这样就有 $Q\leqslant O_p(G)$，矛盾. 从而 $G=PQ$.

(5) $\Phi(G)=1$，并且 $O_p(G)$ 是 G 的唯一极小正规子群，$O_p(G)=P'$.

设 N 是 G 的任一极小正规子群，由步骤(1),(4) 知 $N\leqslant O_p(G)$. 由引理 1(2) 知 P/N 在 $N_{G/N}(P/N)=N_G(P)N/N$ 中 M-可补，而又由引理 2(2) 知 $(P/N)'=P'N/N$ 在 G/N 中 s-拟正规，从而 G/N 满足定理 1 的假设，根据 G 的选取知 G/N 是 p-幂零的. 因为 p-幂零群类是饱和群系，所以 N 为 G 的唯一极小正规子群且 $\Phi(G)=1$.

由文献[11] 中的定理 1 知，$O_p(G)\leqslant F(G)=N$，故 $O_p(G)=N$. 又由步骤(3) 知 $1\neq P'\leqslant O_p(G)$，由 $O_p(G)$ 的极小性知 $P'=O_p(G)$.

(6) G 是 p-幂零群.

由步骤(5) 知 $O_p(G)=P'\leqslant\Phi(P)$. 由文献[7] 知 $O_p(G)\leqslant\Phi(G)=1$，这与 $O_p(G)\neq 1$ 矛盾.

定理 2　设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的极小素因子，H 是 G 的正规子群并且使得 G/H 是 p-幂零的. 如果存在 H 的 Sylow p-子群 P 在 $N_G(P)$ 中 M-可补，并且 P' 在 G 中 s-拟正规(其中 P' 为 P 的导群)，那么 G 是 p-幂零的.

证　对 G 的阶进行归纳. 根据引理 1(1) 及引理 2(1) 知，P 在 $N_H(P)$ 中 M-可补，P' 在 H 中 s-拟正规. 又由定理 1 可知 H 是 p-幂零的. 设 T 为 H 的正规 p-补，从而 T char H，故 $T\trianglelefteq G$.

若 $T \neq 1$，正规子群 H/T 满足定理 2 的假设，并且 $(G/T)/(H/T) \cong G/H$ 是 p-幂零的，从而由归纳假设知 G/T 是 p-幂零的，故 G 是 p-幂零的.

若 $T=1$，由于 G/P 是 p-幂零的，则 $H=P$ 为 G 的 p-子群. 设 R/P 为 G/P 的正规 p-补，由于 $N_R(P)=N_G(P)\cap R \leqslant N_G(P)$，故由引理 1(1) 知 P 在 $N_R(P)$ 中 M-可补. 由引理 2(1) 知 P' 在 R 中 s-拟正规，从而由定理 1 知 R 是 p-幂零的. 设 S 为 R 的正规 p-补，易知 S 也为 G 的正规 p-补，从而 G 是 p-幂零的.

定理 3　设 G 是有限群，如果对 $|G|$ 的任意素因子 p 都有 Sylow p-子群 P 在 $N_G(P)$ 中 M-可补，并且 P' 在 G 中 s-拟正规(其中 P' 为 P 的导群)，那么 G 是超可解的.

证　假设 G 为最小阶反例.

由定理 1 知 G 具有超可解型的 Sylow 塔，因此 G 可解. 设 N 为 G 的一个极小正规子群，根据引理 1(1) 和文献[11] 中的定理 2 知 PN/N 在 $N_{G/N}(PN/N)=N_G(P)N/N$ 中 M-可补. 又因为 $(PN/N)'=P'N/N$ 在 G/N 中 s-拟正规，从而 G/N 满足定理 2 的条件，由 G 的选择知 G/N 超可解. 由于超可解群系是饱和群系，所以有 N 是 G 的唯一的极小正规子群，并且 $\Phi(G)=1$.

设 q 为 $|G|$ 的极大素因子，Q 为 G 的 Sylow q-子群，那么 $Q \trianglelefteq G$. 由 N 的唯一性知 $N \leqslant Q$. 由于 $\Phi(G)=1$，从而存在 G 的极大子群 M，使得 $G=MN$ 且 $M\cap N=1$. 易知 $Q=M_qN$，其中 M_q 为 M 的 Sylow q-子群. 此时我们断言存在 Q 的极大子群 Q_1，使得 $M_q < Q_1$. 否则，若 $M_q=Q$，则由 $M\cap N=1$ 知 $N=1$，矛盾. 若 $M_q=Q_1$，由 $M\cap N=1$ 及 Q_1 的极大性知 $Q=Q_1N$，就有 $|Q|=\dfrac{|Q_1||N|}{|Q_1\cap N|}$，从而 $|N|=\dfrac{|Q|}{|Q_1|}=q$，即 N 为素数阶循环群，再由 G/N 超可解得到群 G 超可解，矛盾.

由定理 2 的假设，Q 在 $N_G(Q)=G$ 中 M-可补，存在 $B\leqslant G$ 使 $G=QB$，且对于 Q 的任意极大子群 Q_i 都有 $Q_iB<G$. 不妨选择极大子群 Q_1，由文献[8] 中的定理 2 知 $|G:Q_1B|=q$. 若 $N\leqslant Q_1B$，则 $Q_1B=NQ_1B=NM_qQ_1B=QB=G$，矛盾. 从而 $N \nleqslant Q_1B$，故 $G=NQ_1B$. 由 N 的极小性知 $N\cap Q_1B=1$. 从而 $|G|=|NQ_1B|=\dfrac{|N||Q_1B|}{|N\cap Q_1B|}=|N||Q_1B|$，即 $|N|=|G:Q_1B|=q$，因此由 G/N 超可解得到群 G 超可解，矛盾.

定理 4　设 $\mathscr{F}$ 是包含 U 的饱和群系，G 是有限群，H 是 G 的正规子群且使得 $G/H\in\mathscr{F}$. 对于 H 的每个 Sylow p-子群 P，如果 P 在 $N_G(P)$ 中 M-可补并且 P' 在 G 中是 s-拟正规的(其中 P' 为 P 的导群)，那么 $G\in\mathscr{F}$.

证　用归纳法证明.

显然 H 满足定理 3 的假设，则 H 是超可解的. 设 p 为 H 的阶的极大素因子，P 为 H 的 Sylow p-子群，那么 T char H，因此 $P\trianglelefteq G$. 考虑商群 G/P，由于 $(G/P)/(H/P)\cong G/H$，所以 $(G/P)/(H/P)\in\mathscr{F}$. 显然 G/P 与正规子群 H/P 均满足定理 4 的假设，所以由归纳假设知 $G/P\in\mathscr{F}$. 又因为 P 在 $N_G(P)=G$ 中 M-可补，由文献[8] 得到 $G\in\mathscr{F}$.

参考文献：

[1]　HALL P. A Characteristic Property of Soluble Groups [J]. London Math Soc, 1937, 12: 188－200.

[2]　SRINIVASAN S. Two Sufficient Conditions for Supersolvability of Finite Groups [J]. Israel J Math, 1980, 35(3): 210－214.

[3]　WANG Yan-ming. Finite Groups with Some Subgroups of Sylow Subgroups c-Supplemented [J]. Algebra , 2000, 224: 467－478.

[4]　ZHANG Xin-jian, GUO Wen-bin. Shum KP s-Normal Subgroups of Finite Groups [J]. Journal of Applied Algebra and Discrete Structures, 2003(2): 98－99.

[5]　郭秀云，赵先鹤. Sylow 子群的极大子群在局部子群中的 π-拟正规性 [J]. 数学物理学报，2008，28(6)：1222－1226.

[6] MIAO Long. The Influence of M-Supplemented Subgroups on the Structure of Finite Groups [J]. Bull Braz Math Soc, 2009, 40(4): 495—509.

[7] 徐明曜. 有限群导引(上) [M]. 北京：科学出版社，2007.

[8] MIAO Long, WANG Yan-ming. M-Supplemented Subgroups and Their Properties [J]. Comm Algebra, 2009, 37(2): 594—603.

[9] KEGEL O H. Sylow-Grouppen und Subnormal Endlicher Grouppen [J]. Math Z, 1962, 78: 205—221.

[10] MIAO Long, LEMPKEN W. On M-Supplemented Subgroups of Finite Groups [J]. Group Theory, 2009, 12: 271—287.

[11] GUO Wen-bin. The Theory of Classes of Groups [M]. New York: Science Press-Kluwer Acad, 2000.

The Influence of *M*-Supplementation of Sylow Subgroups on the Structure of Finite Groups

PU Zhao-nian[1], TANG Ju-ping[2]

1. *Department of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye Gansu, 734000, China;*

2. *Department of Mathematic Sciences, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu, 225002, China*

Abstract: A subgroup H of G is said to be M-supplemented in G if there exists a subgroup B of G such that $G=HB$ and $H_1B<G$ for every maximal subgroup H_1 of H. In this paper, the M-supplementation in $N_G(P)$ of G is investigated. Some new results about p-nilpotency and formation are obtained.

Key words: finite group; M-supplemented subgroup; p-nilpotent group; Sylow subgroup; normalizer

责任编辑 廖 坤