文章编号:1000-5471(2012)04-0001-04

稳定矩阵、正定矩阵和 M-矩阵的新判定[①]

王大飞，　耿宏瑞，　刘　静

重庆大学 数学与统计学院，重庆 401331

摘要： 指出最近已有结论中存在的问题，给出其解决的办法. 得到一种新的判定矩阵稳定性、正定性以及矩阵为 M-矩阵的方法.

关　键　词： 稳定矩阵；正定矩阵；M-矩阵；特征值

中图分类号： O151.21　　　**文献标志码：** A

关于矩阵的研究已有很多有趣的结果(参见文献[1-6]). 文献[1]给出了判定矩阵稳定性、正定性以及矩阵为 M-矩阵的统一简化条件，这与传统的判定正定矩阵、M-矩阵和 Hurwitz 矩阵的条件相比，大大简化了计算过程. 在文献[1]中，作者提出了如下一种新的变换 —— 保号变换：

定义 1[1]　行列式的某行(列)乘以一个正数，或某行(列)乘以某数加上另一行(列)的变换称为行列式的保号变换.

通过行列式的保号变换使该行列式三角化，即

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xrightarrow{\Psi} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{B}|$$

其中 Ψ 表示一系列行列式的保号变换. 但是，在实际操作中却出现了问题. 通过下列两个例子说明产生的问题. 以下约定：kr_i 表示用 $k>0$ 乘以第 i 行，r_i+lr_j 表示用 $l\neq 0$ 乘以第 j 行再加上第 i 行.

例 1[1]　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$，根据保号变换可得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{8}r_1+r_3]{-2r_3+r_2} \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & -\frac{9}{8} & \frac{15}{4} & -\frac{3}{8} \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_4]{r_2+\frac{8}{3}r_3}$$

① 收稿日期：2010-09-25

基金项目：中央高校基金资助项目(CDJXS11100028).

作者简介：王大飞(1983-)，男，山东烟台人，硕士研究生，主要从事数值代数的研究.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[-\frac{3}{2}r_3+r_4]{\frac{1}{5}r_2+r_4} \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{36}{5} \end{vmatrix}$$

由此可判定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是 M-矩阵，而根据矩阵为 M-矩阵的充要条件：

$$\Delta_1 = 4 > 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 11 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 > 0 \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 108 > 0$$

可知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵. 显然这与文献[1] 中的判定相矛盾.

例 2 设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 12 & -8 \\ -1 & -4 & -8 & 2 \end{bmatrix}$，由保号变换得

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 12 & -8 \\ -1 & -4 & -8 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+r_4]{2r_2-r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ -1 & -4 & -8 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4+7r_2]{2r_4+r_1}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 34 & -46 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-\frac{17}{2}r_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，但根据 Sylvester 条件：

$$\Delta_1 = 2 > 0 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 12 \end{vmatrix} = -13 < 0 \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 4 & 12 & -8 \\ -1 & -4 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 10 > 0$$

可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为不定矩阵.

1 问题的解决

通过例 1 和例 2 可以得出：M-矩阵经过保号变换后却判定为非 M-矩阵，而不定矩阵经过保号变换后却判定为正定矩阵，问题出在哪里？ 我们在进行保号变换时，由于运算顺序不同，导致其结论不同. 因为在作保号变换的过程中，只是针对矩阵的两行(列) 或某行(列) 来进行保号变换运算，并没有特定的顺序.

在文献[1] 中，$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$ 与 $\Delta'_k = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$ 要一一对应，即两个行列式的正负性相同或同为零，其中 $1 \leqslant k \leqslant n$. 判定出错的原因就是 Δ_k 与 Δ'_k 没有一一对应，也就是在应用保号变换时改

变了 Δ_k 的正负性.下面给出将定义 1 修正后的定义：

定义 2　要使行列式的第 i 行(列)前 $i-1$ 个元素化为零，只需用该行列式的前 $i-1$ 行(列)与第 i 行(列)进行定义 1 中的两部变换，称其为行列式的顺序保号变换.

定义 2 解决了上述产生的问题，并且切实可行.文献[1]中的命题在定义 2 下仍然成立.

注 1　文献[1]中所判定的矩阵 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的元素 $a_{ii}>0\ (1\leqslant i\leqslant n)$.

2　矩阵稳定性、正定性以及矩阵为 M -矩阵的一种新判定

为了行文的方便，我们用 $\mathbf{C}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶复矩阵的集合，$\boldsymbol{A}^*$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置，$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹，$\|\boldsymbol{A}\|_F$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 F -范数，即 $\|\boldsymbol{A}\|_F=\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})}$.接下来我们用矩阵的特征值法来判定矩阵的稳定性、正定性以及给定矩阵为 M -矩阵.

定理 1　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 $|\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})|^2>(n^2-n)\left[\|\boldsymbol{A}\|_F^2-\dfrac{|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}|^2}{n}\right]$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(只能)位于复平面的一侧.

证　由 $|\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})|^2>(n^2-n)\left[\|\boldsymbol{A}\|_F^2-\dfrac{|\mathrm{tr}\boldsymbol{A}|^2}{n}\right]$，可得

$$\frac{|\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})|}{n}>\sqrt{\frac{n-1}{n}\left[\|\boldsymbol{A}\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}|^2}{n}\right]}$$

根据文献[2]中给出的结论可知任意方阵的特征值都位于圆盘

$$\left\{z\in\mathbf{C}:\ \left|z-\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n}\right|\leqslant\sqrt{\frac{n-1}{n}\left[\|\boldsymbol{A}\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}|^2}{n}\right]}\right\}$$

中，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于复平面的一侧：当 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})>0$ 时，M -矩阵的特征值位于复平面的右半平面；当 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})<0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于复平面的左半平面，故定理 1 得证.

特别地，当 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 时，若 $|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}|^2>(n-1)\|\boldsymbol{A}\|_F^2$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值(只能)位于复平面的一侧.

推论 1　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 $|\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})|^2>(n^2-n)\left[\|\boldsymbol{A}\|_F^2-\dfrac{|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}|^2}{n}\right]$，我们有如下断言：

(1) 当 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})<0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为稳定矩阵；

(2) 当 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})>0$，且 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 正定矩阵；

(3) 当 $\mathrm{Re}(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A})>0$，且 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Z}^{n\times n}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 M -矩阵，其中

$$\mathbf{Z}^{n\times n}=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij}):\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\ a_{ij}\leqslant 0,\ i,j\in\mathbf{N},\ i\neq j\}$$

以下两个相关的定理，其证明的思想与定理 1 相同.

定理 2　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 可写为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{k\times k} & \boldsymbol{B}_{k\times(n-k)}\\ \boldsymbol{C}_{(n-k)\times k} & \boldsymbol{D}_{(n-k)\times(n-k)}\end{pmatrix}$，其中 $1\leqslant k\leqslant n-1$. 令

$$l=\min_{1\leqslant k\leqslant n-1}[\|\boldsymbol{A}_{k\times k}\|_F^2+\|\boldsymbol{D}_{(n-k)\times(n-k)}\|_F^2+2\|\boldsymbol{B}_{k\times(n-k)}\|_F\|\boldsymbol{C}_{(n-k)\times k}\|_F]$$

则若 $\left|\mathrm{Re}(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})\right|>\sqrt{\dfrac{n-1}{n}\left[l-\dfrac{|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}|^2}{n}\right]}$，我们有如下断言：

(1) 当 $\mathrm{Re}(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})<0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为稳定矩阵；

(2) 当 $\mathrm{Re}(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})>0$，且 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 正定矩阵；

(3) 当 $\mathrm{Re}(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})>0$，且 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Z}^{n\times n}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 M -矩阵，其中

$$\mathbf{Z}^{n\times n}=\{\boldsymbol{A}=(a_{ij}):\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\ a_{ij}\leqslant 0,\ i,j\in\mathbf{N},\ i\neq j\}$$

定理 3　设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，若 $\left|\mathrm{Re}(\dfrac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})\right|>\sqrt{\dfrac{n-1}{2n-1}}\cdot\sqrt{\dfrac{n-1}{n}\chi+\sqrt{\chi^2-\dfrac{2n-1}{n^2}\gamma}}$，其中 $\chi=\|\boldsymbol{A}\|_F^2-\dfrac{|\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}|^2}{n}$，

$\gamma=\frac{1}{2}\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}-\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}\|_{F}^{2}$，则我们有如下断言：

(1) 当 $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})<0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为稳定矩阵；

(2) 当 $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})>0$，且 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 矩阵时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 Hermite 正定矩阵；

(3) 当 $\mathrm{Re}(\frac{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A}}{n})>0$，且 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{Z}^{n\times n}$ 时，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 M-矩阵，其中

$$\mathbf{Z}^{n\times n}=\{\mathbf{A}=(a_{ij}):\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n},\ a_{ij}\leqslant 0,\ i,j\in\mathbf{N},\ i\neq j\}$$

参考文献：

[1] 廖晓昕，胥布工. 判定矩阵稳定、正定以及为 M-矩阵的统一简化条件 [J]. 控制理论与应用，1999，16(2)：301－305.
[2] 古以熹. 矩阵特征值的分布 [J]. 应用数学学报，1994，17(4)：501－511.
[3] 屠伯埙，李君如. 方阵特征值之分布及其在稳定性理论中的应用 [J]. 数学年刊：A 辑，1987，8(6)：599－663.
[4] 胡兴凯，邹黎敏. 矩阵特征值和奇异值的估计 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2009，34(3)：40－43.
[5] 胡兴凯，邹黎敏. 矩阵秩和特征值的估计 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(12)：99－102.
[6] 冉艳丽. 矩阵数值特征界的新估计 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，32(4)：134－136.

New Criteria for Stable Matrix, Positive-Definite Matrix and *M*-Matrix

WANG Da-fei, GENG Hong-rui, LIU Jing
School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: In this paper, the problem in present papers is pointed out, the method which solves the problem is given. A new decision method which judges stable matrix, positive-definite matrix and *M*-matrix is proposed.

Key words: stable matrix; positive-definite matrix; *M*-matrix; eigenvalue

责任编辑 廖 坤