文章编号:1000-5471(2012)03-0026-04

从相空间理论研究黑洞形成的熵演化[①]

邓昭镜

西南大学 物理科学与技术学院,重庆 400715

摘要: 试探地通过相空间理论计算稳定黑洞在其形成过程中相体积的变化来直接分析黑洞在其形成过程中熵的演化. 结果发现,按照这一思路能有效地研究黑洞形成过程中的熵演化规律.

关　键　词: 相空间;相体积;状态数;熵

中图分类号: P145.9　　　　**文献标志码:** A

1　相体积和熵

按系综的相空间理论,物系在某一状态上所具有的熵是由该状态在其相空间中占有的状态数决定的,而系统在相空间中占有的状态数又是和该状态在相空间中占有的相体积成正比的,相体积的大小又直接取决于粒子在相空间中占有的维度多少和每一维度上被占有的可及区域的大小. 注意,这里的相体积的维度是指那些能直接反映系统状态变化的所有自由度之集合. 例如平直时空中一缸理想气体,它在相空间中能有效地反映系统状态变化的维度只有 $3N$ 维动量维度,这是因为平直时空中粒子间没有相互作用的势能存在,因此粒子在坐标空间内处处等价,使得粒子的坐标维度与系统状态变化无关,在系统状态表征中只能贡献一个常数,对系统状态变化没有贡献. 但是在有力场(例如引力场)存在的情况下,粒子系的状态维度可以达到 $6N$ 维,因为这时粒子不仅具有能反映粒子动能变化的 $3N$ 维动量维度,同时,还具有能反映粒子势能维度变化的 $3N$ 维坐标维度. 但是,当粒子系处在球对称强引力场中,比如 SW 黑洞的强引力场中时,粒子在相空间的维度又会降至 $3N$ 维. 这是因为根据不毛定理,在 SW 黑洞视界附近粒子的状态只由粒子所受的视界引力 $\kappa_+(r, \theta, \varphi)$ 决定,或者说在视界附近只由引力产生的径向动量 $p_r(\theta, \varphi)$ 决定,也就是说每个粒子的状态在视界面上只由 p_r,θ 和 φ 3 个坐标决定,使得 SW 黑洞视界附近的粒子系统在相空间的维度降至 $3N$ 维[1].

由此可见,粒子系在相空间所占有的相体积,首先,取决于粒子系在相空间所能占有的维度的多少,其次是粒子在每一维度上的可及区域的大小. 拥有的维度愈多,同时在每一维度上的可及区域也大,则该粒子系在相空间中占有的相体积就愈大,进而该粒子系所拥有的状态数也愈大,由此所决定的该粒子系在所处的宏观态中所具有的熵也就愈大. 相体积 ω、状态数 Γ 和熵 S 三者间的关系表示为[2]

$$S = k_{\mathrm{B}} \ln \Gamma = k_B \ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{1}$$

式中:k_{B} 是 Boltzmann 常数;ω_0 是一个微观态所占有的极限相体积,可以从理论和实验证明这里的 $\omega_0 \approx h^{\mathscr{D}}$,其中 $\mathscr{D}$ 是相空间占有的维度(例如 $\mathscr{D}=3N$,$\mathscr{D}=6N$ 等)[3].

为了应用相空间理论来分析星云内黑洞形成过程中熵的演化,可将星云内黑洞形成过程中熵的演化分

① 收稿日期:2011-06-01
作者简介:邓昭镜(1932-),男,湖北宜昌人,教授,主要从事凝聚态物理的研究.

为两个阶段，其中第一个阶段是粒子在黑洞中心体引力场强制下沿径向被吸引至黑洞视界面的过程，这个过程称为“整肃”过程；第二个阶段，是这些已被“整肃”吸向视界的粒子系，以它们所具有的径向动量“撞击”黑洞视界产生“热辐射”的过程，称为“撞击辐射”过程[4].

2 “整肃”过程中相体积和熵的演化

为简化计，现在考虑星云中将要形成球对称黑洞视界的粒子系. 设该粒子系的粒子数为 N，在球对称坐标空间中，这部分粒子系位于 σ_0 和 σ 两球面之间(图 1)，而在相空间中这部分粒子系的初始态相体积 ω_i 恰是由相空间中超曲面 Σ_0 和 Σ 围成的相体积. 由于在视界以外的广大区域中，每个粒子既具有引力势能的坐标维度(r,θ,φ)，又具有动能的 3 个动量维度(p_r, p_θ, p_φ)，因此该粒子系初始态相体积由 $6N$ 维表示：

$$\omega_i = \int_{\Sigma_{i0}}^{\Sigma_i}\int \mathrm{d}^{3N} q_\alpha \mathrm{d}^{3N} p_\alpha \tag{2}$$

式中：N 是粒子数，q_α 和 p_α 分别是粒子的坐标和动量，与此相体积相对应的粒子系的状态数 Γ_i 表示为

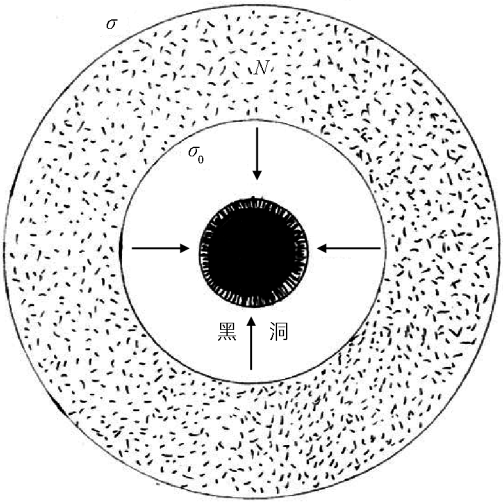

图 1　星云“整肃”过程示意

$$\Gamma_i = \frac{\omega_i}{\omega_0} = \frac{\int_{\Sigma_{i0}}^{\Sigma_i}\cdots\int \mathrm{d}^{3N} q_\alpha \mathrm{d}^{3N} p_\alpha}{\omega_0} \tag{3}$$

式中：Σ_0, Σ 是粒子系的状态在相空间占有区域的内、外超曲面；ω_0 是一个微观状态占有的极限相体积. 如前所述，$\omega_0 = h^{6N}$，$h = 6.626 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$，代入(3) 式，则有

$$\Gamma_i = \frac{1}{h^{6N}}\int_{\Sigma_{i0}}^{\Sigma_i}\cdots\int \mathrm{d}^{3N} q_\alpha \mathrm{d}^{3N} p_\alpha \tag{3'}$$

由此可以确定系统在“整肃”过程中初始状态的熵 S_i，表示为

$$S_i = k_B \ln\Gamma_i = k_B \ln(\frac{\omega_i}{h^{6N}}) \tag{4}$$

通过“整肃”过程将使星云中粒子系的相体积在中心体引力场强制下，由 $6N$ 维转变为 $3N$ 维，这是“不毛定理”的结果[5]. “不毛定理”要求粒子系中每一个粒子的坐标 $\boldsymbol{r}(r, \theta, \varphi)$ 必需坐落在 r_+ 的视界面上点 $r_+(\theta, \varphi)$ 上，使得粒子的坐标只由视界面上 θ, φ 两维坐标决定；同时，粒子的动量必需只沿径向，使得粒子动量只由 p_r 决定. 就是说“不毛定理”使粒子的维度在视界面上降为三维：p_r, θ 和 φ，用 $p(\theta, \varphi)$ 表示. 因此，对由 N 个粒子组成的粒子系其总维度只有 $3N$ 维，于是粒子系在“整肃”过程的终态相体积 ω_e 应表示为

$$\omega_e = \left\{\int_0^{P_r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p_r(\theta, \varphi) r_+^2 \,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}p_r\right\}^N \tag{5}$$

式中：r_+ 是视界半径，是一个基本不变量. 相应于 ω_e 的状态数 Γ_e 和熵 S_e 应表示为：

$$\Gamma_e = \frac{\omega_e}{h^{3N}} = \frac{1}{h^{3N}}\left\{\int_0^{P_r}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r_+^2\, p_r(\theta, \varphi) \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}p_r\right\}^N \tag{6}$$

$$S_e = k_\mathrm{B} \ln\Gamma_e = k_\mathrm{B} \ln(\frac{\omega_e}{h^{3N}}) \tag{7}$$

综合(4)、(7) 两式，通过“整肃”过程，即粒子系在中心体引力场强制的过程中所产生的熵改变是

$$\begin{aligned}(\Delta S)_{\mathrm{ord}} &= S_e - S_i = \kappa_B \ln(\frac{\Gamma_e}{\Gamma_i}) \\ &= -k_\mathrm{B}\{\ln(h)^{3N} + \ln(\frac{\omega_i}{\omega_e})\} \\ &= -180.6 N k_\mathrm{B} - k_\mathrm{B}\ln(\frac{\omega_i}{\omega_e})\end{aligned} \tag{8}$$

(8) 式中由于 ω_e 是 $3N$ 维相体积，而 ω_i 是 $6N$ 维相体积. 因此，ω_e 是 ω_i 的一个真子集[5] 即 $\omega_e \subset \omega_i$，由此可得 $(\frac{\omega_i}{\omega_e}) \gg 1$，故由(8) 式可得

$$(\Delta S)_{\mathrm{ord}} = S_e - S_i = -180.6Nk_{\mathrm{B}} - k_{\mathrm{B}}\ln(\frac{\omega_i}{\omega_E}) \ll 0 \tag{9}$$

(9) 式表明“整肃”过程是一个显然的熵减少过程[6].

3 “撞击辐射”过程中相体积和熵的演化

“撞击辐射”过程是粒子系在中心体引力场强制下所获得的径向动量，沿径向垂直撞击视界，并将粒子相对于视界的动能转化为“热辐射”的过程. 显然“撞击辐射”过程的初态就是“整肃”过程的终态 S_e，因此“撞击辐射”过程的初态应表示为

$$S_e = k_{\mathrm{B}}\ln\Gamma_e = k_{\mathrm{B}}\ln(\frac{\omega_e}{h^{3N}}) \tag{10}$$

“撞击辐射”过程的实质是在“撞击”中使粒子相对于视界的运动质量转化为视界外部的辐射量子气体. 因此,“撞击”过程必然使“整肃”过程中本应由运动质量所产生的那一部分视界面积的增加，在“撞击”过程中被撞掉，使原来本应增加的视界面积减少. 说得更确切些，就是使视界面积的增量减少到只由被吸引粒子相对于视界静止的固有质量组成视界面积的增量，而被撞掉的运动质量在视界外转化化为量子辐射气体. 因此,“撞击”后黑洞视界附近粒子系的相体积 $\tilde{\omega}$ 应由两个因素之积表示，即

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(M_0)\tilde{\omega}(M_K) \tag{11}$$

式中：$\tilde{\omega}(M_0)$ 是固有质量 M_0 在撞击中形成的相体积，$\tilde{\omega}(M_k)$ 是由运动质量 M_k 转化为光量子气体的相体积. $\tilde{\omega}(M_0)$ 实际上是 N 个粒子在视界面上作二维分布的相体积，因此 $\tilde{\omega}(M_0)$ 应表示为

$$\tilde{\omega}(M_0) = r_+^{2N}\,[\iint\gamma(\theta,\varphi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi]^N \tag{12}$$

式中：$\gamma(\theta,\varphi)$ 是质量 m_0 的粒子在 r_+ 视界面上的分布函数；$\tilde{\omega}(M_k)$ 则是视界以外区域中 $3N'$ 维光量子动量相体积，表示为：

$$\tilde{\omega}(M_k) = \int_{\tilde{\Sigma}}^{\tilde{\Sigma}}\cdots\int \mathrm{d}^{3N'}p \tag{13}$$

式中：$\tilde{\Sigma}_0$，$\tilde{\Sigma}$ 是视界外量子辐射气体相体积内、外超曲面；N' 是平衡的量子气体的量子数. 由(12)、(13) 两式可以求得粒子系统在“撞击”过程中产生的状态数；

$$\tilde{\Gamma} = \frac{\tilde{\omega}(M_0)}{h^{2N}}\frac{\tilde{\omega}(M_k)}{h^{3N'}} \tag{14}$$

进而求得“撞击”后粒子系的熵：

$$\tilde{S} = k_{\mathrm{B}}\left\{\ln\frac{\tilde{\omega}(M_0)}{h^{2N}} + \ln\frac{\tilde{\omega}(M_k)}{h^{3N'}}\right\} \tag{15}$$

结合(10) 式和(15) 式就可以求得“撞击”过程中产生的熵变化：

$$\begin{aligned}(\Delta\tilde{S})_{\mathrm{col}} &= \tilde{S} - S_e = k_{\mathrm{B}}[\ln\frac{\tilde{\omega}(M_0)}{\omega_e} + \ln\frac{\tilde{\omega}(M_k)}{h^{\alpha N}}] \\ &= k_{\mathrm{B}}[\ln(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_e}) - \ln h^{\alpha N}],\ \alpha = 3\frac{N'}{N} - 1\end{aligned} \tag{16}$$

在这里 $\tilde{\omega}(M_k)$ 的维度不会低于 $3N$ 维，这是因为每一个粒子的动量在“撞击”中至少会产生一个辐射光量子，因此，$\tilde{\omega}(M_k)$ 的维度不会低于 $3N$ 维，即 $N' \geqslant N$，为了简化，取 $N' = (\frac{4}{3})N$，即 $\alpha = 3$，在这样选取下(16) 式变为

$$(\Delta\tilde{S})_{\mathrm{col}} = k_{\mathrm{B}}[\ln(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_e}) + 180.6N] > 0 \tag{17}$$

(17) 式表明星云在“撞击”过程中必然导致熵增加[7].

现在将“整肃”过程的熵演化与“撞击”过程的熵演化加起来，就得到两个相继连续过程产生的总熵

变化：

$$
\begin{aligned}
(\Delta S)_{\text{tot}} &= (\Delta S)_{\text{ord}} + (\Delta S)_{\text{col}} \\
&= k_{\text{B}}[\ln \frac{\omega_e}{\omega_i} - 180.6N] + k_{\text{B}}[\ln \frac{\tilde{\omega}}{\omega_e} + 180.6N] \\
&= k_{\text{B}} \ln(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_i})
\end{aligned} \tag{18}
$$

其中：ω_i 是 $6N$ 维的相体积，$\tilde{\omega}$ 是 $5N$ 维相体积．同时 ω_i 又是在满足 $M_0 + M_k = M$ 的条件下，可能实现的一切 $\tilde{\omega}(M_0)$ 与 $\tilde{\omega}(M_k)$ 配对子集之和表示，即：

$$
\omega_i = \Sigma' \tilde{\omega}(M_0) \cup \tilde{\omega}(M_k) \tag{19}
$$

式中：Σ' 符号表示在满足条件 $M_0 + M_k = M$ 下，对 M_0, M_k 的所有可能的配对组合（即 M_0, M_k 组合）求和，因此显然有 $\omega_i \gg \tilde{\omega}$，由此进一步得

$$
(\Delta S)_{\text{tot}} = k_{\text{B}} \ln(\frac{\tilde{\omega}}{\omega_i}) \ll 0 \tag{20}
$$

(20) 表示星云内形成黑洞的过程是一个显然的熵减少过程．

参考文献：

[1] 徐龙道．物理学词典 [M]．北京：科学出版社，2004：869．

[2] PATHRIA R K. Statistical Mechanics [M]，New York：Oxford，1972：39－43．

[3] D 特哈尔．统计力学 [M]．丁原昌，译．上海：上海科技出版社，1980：48－52．

[4] 刘　辽，赵　峥．黑洞与时间的性质 [M]．北京：北京大学出版社，2008：85－96．

[5] 柯　召，魏万迪．组合论 [M]．北京：科学出版社，1981：2－3．

[6] 邓昭镜．自聚集星体的内能和它的熵的演化 [J]．西南大学学报：自然科学版，2010，32(1)：44－48．

[7] 刘　辽，赵　峥，黑洞与时间的性质 [M]．北京：北京大学出版社，2008：90－96．

A Study of Entropy Evolution in the Process of Black Hole Formation Based on the Theory of Phase Space

DENG Zhao-jing

School of Physics Science and Technology，SWU，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，the changes in phase volume during the formation of stationary black holes are calculated，using the theory of phase space，so as to analyze the entropy evolution in the process of their formation. We find that this approach is helpful for the study of the evolution of entropy of black holes during their formation.

Key words：phase space；phase volume；number of the microstates；entropy

责任编辑　潘春燕