第 37 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2012 年 3 月
Vol. 37 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2012

文章编号:1000-5471(2012)03-0016-04

一个考虑扩散的 Holling-Tanner 捕食-食饵模型研究[①]

张国洪, 王小利, 王稳地

西南大学 数学统计学院,重庆 400715

摘要:研究了一个在齐次 Neumann 边界条件下考虑扩散的 Holling-Tanner 捕食-食饵模型. 首先,得到了系统的全局吸引子和持久性;然后,讨论了系统正常数平衡解的全局渐进稳定性;最后,研究了系统的 Turning 失稳性质.

关 键 词:Holling-Tanner 捕食-食饵模型;全局吸引子;持续性;全局稳定性;Turning 失稳

中图分类号:O175.14;Q141 **文献标志码**:A

近年来,考虑扩散的 Holling-Tanner 型捕食-食饵模型受到很多学者的关注. 文献[1] 主要考虑了 Holling-II 型功能性反应函数时 Holling-Tanner 型捕食-食饵模型的非常数正平衡解的存在性;文献[2] 主要讨论了 Beddington-DeAngelis 型功能性反应函数时 Holling-Tanner 型捕食-食饵模型常数平衡解的全局稳定性及非常数正平衡解的存在性;文献[3] 主要研究了比率依赖型功能性反应函数时 Holling-Tanner 型捕食-食饵模型的 Hopf 分叉问题. 本文对文献[3] 所给的模型作进一步研究. 考虑的模型为:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u(1 - u - \dfrac{uv}{u + \alpha v}) & x \in \Omega \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_1 \Delta v + \delta v(\beta - \dfrac{v}{u}) & x \in \Omega \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ (u(0, x), v(0, x)) = (u_0(x), v_0(x)) \geqslant 0 & x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中:Ω 是一个具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域,考虑齐次 Neumann 边界条件,说明在边界 $\partial\Omega$ 上没有种群迁移,正常数 d_1 和 d_2 是扩散系数,其余参数皆为正,相关参数生物学意义可参见文献[3-4]. 易知,当 $\alpha\beta + 1 > \beta$ 时,(1) 式有唯一正常数平衡解 $(\bar{u}, \bar{v})$,其中 $\bar{u} = 1 - \dfrac{\beta}{1 + \alpha\beta}$,$\bar{v} = \beta\bar{u}$.

1 解的动力学性质

定理 1 假设 (u, v) 是(1) 式的一个非负解,则在 Ω 内有

$$\limsup_{t \to \infty} u(x, t) \leqslant 1 \qquad \limsup_{t \to \infty} v(x, t) \leqslant \beta \tag{2}$$

证 当 $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$ 时,由 (u, v) 的非负性可得 $u(1 - u - \dfrac{uv}{u + \alpha v}) \leqslant u(1 - u)$,从而由抛物

---

① 收稿日期:2010-11-28
作者简介:张国洪(1977-),男,四川成都人,讲师,主要从事微分方程研究.

方程比较原理知 $\limsup\limits_{t\to\infty} u(x,t)\leqslant 1$ 从而对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T\in(0,\infty)$，使得当 $(x,t)\in\Omega\times(T,\infty)$ 时，有 $u(x,t)\leqslant 1+\varepsilon$，因此可得 $\delta v(\beta-\frac{v}{u})\leqslant\delta v(\beta-\frac{v}{1+\varepsilon})$. 再次由抛物方程比较原理知 $\limsup\limits_{t\to\infty} v(x,t)\leqslant\beta$.

定理 2　假设 $\alpha>1$，u_0, v_0 均不恒为零，(u,v) 是(1)式的一个正解，则存在 $\sigma>0$，使得在 $\overline{\Omega}$ 上有

$$\liminf_{t\to\infty} u(x,t)\geqslant\delta \qquad \liminf_{t\to\infty} v(x,t)\geqslant\sigma \tag{3}$$

证　由 (u,v) 是(1)式的一个正解及 $\alpha>1$，可知 $u(1-u-\frac{uv}{u+\alpha v})\geqslant u(1-u-\alpha^{-1})$. 从而由抛物方程比较原理知 $\limsup\limits_{t\to\infty} u(x,t)\geqslant 1-\alpha^{-1}$. 故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $T\in(0,\infty)$，使得当 $(x,t)\in\Omega\times(T,\infty)$ 时，有 $u(x,t)\geqslant 1-\alpha^{-1}-\varepsilon$. 再由(1)式第二个方程可得 $\delta v(\beta-\frac{v}{u})\geqslant\delta v(\beta-\frac{v}{1-\alpha^{-1}-\varepsilon})$，从而由抛物方程比较原理，令 $\varepsilon\to 0$，可得 $\liminf\limits_{t\to\infty} v(x,t)\geqslant\beta(1-\alpha^{-1})$. 最后，取 $\sigma=\min\{1-\alpha^{-1},\beta(1-\alpha^{-1})\}$，易见(3)式成立.

定理 3　假设 $\alpha\beta+1>\beta$，$1-\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2(\alpha-1)}-\frac{\alpha}{2(1+\alpha\beta)^2(\alpha-1)}-\frac{\alpha\beta}{2(\alpha-1)}\geqslant 0$. 则(1)式的唯一正常数平衡解 $(\bar{u},\bar{v})$ 全局渐进稳定.

证　令 (u,v) 是(1)式的一个正解，构造如下 Lyapunov 函数：

$$E(t)=\int_\Omega((u-\bar{u}-\bar{u}\log\frac{u}{\bar{u}})+\frac{1}{\delta}(v-\bar{v}-\bar{v}\log\frac{v}{\bar{v}}))\mathrm{d}x$$

通过简单计算可得

$$E'(t)=\int_\Omega((1-\frac{\bar{u}}{u})d_1\Delta u+(1-\frac{\bar{v}}{v})\frac{d_2}{\delta}\Delta v)\mathrm{d}x+\int_\Omega((u-\bar{u})(1-u-\frac{v}{u+\alpha v})+(v-\bar{v})(\beta-\frac{v}{u}))\mathrm{d}x=I_1(t)+I_2(t)$$

再由 Neumann 边界条件可知

$$I_1(t)=\int_\Omega((1-\frac{\bar{u}}{u})d_1\Delta u+(1-\frac{\bar{v}}{v})\frac{d_2}{\delta}\Delta v)\mathrm{d}x=-\int_\Omega(\frac{\bar{u}|\nabla u|^2}{u^2}+\frac{\bar{v}|\nabla v|^2}{v^2})\mathrm{d}x\leqslant 0$$

又由 $1-\bar{u}-\frac{\bar{v}}{\bar{u}+\alpha\bar{v}}=0$，$\beta-\frac{\bar{v}}{\bar{u}}=0$，可得

$$I_2(t)=\int_\Omega(-(u-\bar{u})^2+(u-\bar{u})^2\frac{\bar{v}}{(\bar{u}+\alpha\bar{v})(u+\alpha v)}-\frac{\bar{u}(u-\bar{u})(v-\bar{v})}{(\bar{u}+\alpha\bar{v})(u+\alpha v)}+\frac{\beta(u-\bar{u})(v-\bar{v})}{u}-\frac{(v-\bar{v})^2}{u})\mathrm{d}x$$

利用不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，可得

$$I_2(t)\leqslant\int_\Omega(-(u-\bar{u})^2+(u-\bar{u})^2\frac{\bar{v}}{(\bar{u}+\alpha\bar{v})(u+\alpha v)}+\frac{\bar{u}(u-\bar{u})^2}{2(\bar{u}+\alpha\bar{v})(u+\alpha v)}+\frac{\bar{u}(v-\bar{v})^2}{2(\bar{u}+\alpha\bar{v})(u+\alpha v)}+\frac{\beta(u-\bar{u})^2}{2u})\mathrm{d}x+\int_\Omega(\frac{\beta(u-\bar{u})^2}{2u}+\frac{\beta(v-\bar{v})^2}{2u}-\frac{(v-\bar{v})^2}{u})\mathrm{d}x$$

由定理 1 及定理 2 知，存在 T，使得当 $t>T$ 时有

$$\frac{\bar{v}}{(\bar{u}+\alpha\bar{v})(u+\alpha v)}\leqslant\frac{\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2(\alpha-1)}$$

$$\frac{\beta}{u}\leqslant\frac{\alpha\beta}{2(\alpha-1)}$$

$$\frac{\bar{u}}{(\bar{u}+\alpha\bar{v})(u+\alpha v)}\leqslant\frac{\alpha}{2(1+\alpha\beta)^2(\alpha-1)}$$

从而当$(x, t) \in \Omega \times (T, \infty)$时，有

$$I_2(t) \leqslant \int_\Omega \Big(-1 + \frac{\alpha\beta}{(1+\alpha\beta)^2(\alpha-1)} + \frac{\alpha}{2(1+\alpha\beta)^2(\alpha-1)} + \frac{\alpha\beta}{2(\alpha-1)}\Big)(u-\bar{u})^2 \mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(-1 + \frac{\alpha}{2(1+\alpha\beta)^2(\alpha-1)} + \frac{\alpha\beta}{2(\alpha-1)}\Big)(u-\bar{u})^2 \mathrm{d}x \tag{4}$$

从而由假设条件可得$I_2(t) \leqslant 0$，进而$E'(t) = I_1(t) + I_2(t) \leqslant 0$，且易知当且仅当$(u, v) = (\bar{u}, \bar{v})$时，(4)式等式成立，从而知定理结论成立.

2 正常数平衡解的 Turning 失稳

为便于理解，首先引入下面的引理，并给出相应常微分方程唯一正常数平衡解$(\bar{u}, \bar{v})$局部渐进稳定性.

引理 1[4] 设$d_1 = 0$，$d_2 = 0$. 若$\alpha\beta + 1 > \beta$，$(\alpha\beta + 2)\beta < (\delta\beta + 1)(\alpha\beta + 1)^2$，则(1)式的唯一正常数平衡解$(\bar{u}, \bar{v})$局部渐进稳定.

为了讨论系统(1)正常数平衡解的稳定性，引入下面几个概念.

(i) $0 = \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots$是$-\Delta$在 Neumann 条件下$\Omega$内的特征值.

(ii) $S(\mu_i)$是μ_i对应的特征函数.

(iii) $\boldsymbol{X}_{ij} := \boldsymbol{c}\varphi_{ij}$，$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^2$，其中$\varphi_{ij}$，$j = 1, \cdots, \dim[S(\mu_i)]$是$S(\mu_i)$的正交基.

(iv) $\boldsymbol{X} := \{(u, v) \in C^1(\bar{\Omega}) \times C^1(\bar{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0\}$，因此$\boldsymbol{X} = \oplus_{i=0}^{\infty} \oplus_{j=1}^{\dim[S(\mu)]_i} \boldsymbol{X}_{ij}$.

定理 4 假设$\alpha\beta + 1 > \beta$.

(i) 若$(\alpha\beta + 2)\beta < (\alpha\beta + 1)^2$，$(\alpha\beta + 2)\beta < (\delta\beta + 1)(\alpha\beta + 1)^2$，则(1)式的唯一正常数平衡解$(\bar{u}, \bar{v})$局部渐进稳定.

(ii) 若$(\alpha\beta + 2)\beta > (\alpha\beta + 1)^2$，$\Big(1 - \frac{\beta(2+\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)^2}\Big)d_2 + \delta\beta d_1 < 0$，则(1)式的唯一正常数平衡解$(\bar{u}, \bar{v})$不稳定.

证 首先，系统(1)在$\bar{\boldsymbol{w}}$处线性化可得$\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{D\Delta} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})\boldsymbol{w}$，其中$\boldsymbol{w} = (u(x, t), v(x, t))^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{F} = \Big(u(1-u) - \frac{uv}{u+\alpha v}, \delta v\big(\beta - \frac{v}{u}\big)\Big)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$，且

$$\boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}}) = \begin{pmatrix} 1 - 2\bar{u} - \frac{\alpha \bar{v}^2}{(\bar{u}+\alpha\bar{v})^2} & -\frac{\bar{u}^2}{(\bar{u}+\alpha\bar{v})^2} \\ \delta\beta^2 & -\delta\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\beta(2+\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)^2} & -\frac{1}{(1+\alpha\beta)^2} \\ \delta\beta^2 & -\delta\beta \end{pmatrix}$$

易知，λ为算子$\boldsymbol{D\Delta} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})$在$\oplus_{j=1}^{\dim[S(\mu)]_i} X_{ij}$上的特征值当且仅当其为矩阵$-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})$的特征值. 同时，经过简单的计算可知

$$\det(\lambda I - \mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})) = \lambda^2 - \mathrm{trac}(-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}}))\lambda + \det(-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}}))$$

其中

$$\mathrm{trac}(-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})) = -(d_1 + d_2)\mu_i + \frac{\beta(2+\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)^2} - \delta\beta - 1$$

$$\det(-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})) = d_1 d_2 {\mu_i}^2 + \Big[\Big(1 - \frac{\beta(2+\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)^2}\Big)d_2 + \delta\beta d_1\Big]\mu_i + \delta\beta\Big(1 - \frac{\beta}{1+\alpha\beta}\Big)$$

(i) 由于$(\alpha\beta + 2)\beta < (\alpha\beta + 1)^2$，可知$\Big(1 - \frac{\beta(2+\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)^2}\Big)d_2 + \delta\beta d_1 > 0$. 从而对所有$i \geqslant 0$，都有$\det(-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})) > 0$. 再由$(\alpha\beta + 2)\beta < (\delta\beta + 1)(\alpha\beta + 1)^2$，知$\mathrm{trac}(-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})) < 0$. 所以，对所有$i \geqslant 0$，矩阵$-\mu_i\boldsymbol{D} + \boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})$的特征值具有负实部，由文献[5]定理 5.1.1 即知结论成立.

(ii) 由条件知当d_2充分大而d_1较小时，$\Big(1 - \frac{\beta(2+\alpha\beta)}{(1+\alpha\beta)^2}\Big)d_2 + \delta\beta d_1 < 0$. 从而对某个$\mu_i$，有$\det(-\mu_i\boldsymbol{D}$

$+\boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}}))<0$，知矩阵 $-\mu_i\boldsymbol{D}+\boldsymbol{F}_w(\bar{\boldsymbol{w}})$ 至少有一个具有正实部的特征值，再由文献[5]定理 5.1.1 知结论成立.

参考文献：

[1] PENG Rui，WANG Ming-xin. Positive Steady-States of the Holling-Tanner Prey-Predator Model with Diffusion [J]. Roy Soc，2005，135(1)：149－164.

[2] SHI Hong-bo，LI Wan-tong，LIN Guo. Positive Steady-States of a Diffusive Predator-Prey System with Modified Holling-Tanner Functional Response [J]. Nonlinear Analysis，2010，11(5)：3711－3721.

[3] WANG Xiao-li，WANG Wen-di，ZHANG Guo-hong. Hopf Bifurcation Analysis of a Ratio-Dependent Holling-Tanner Predator-Prey Model [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(3)：1－4.

[4] LIANG Zhi-qing，PAN Hong-wei. Qualitative Analysis of a Ratio-Dependent Holling-Tanner Model [J]. J Math Anal，2007，334(2)：954－964.

[5] HENRY D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations [M]. Berlin：Springer，1993.

Qualitative Analysis of a Holling-Tanner Predator-Prey Model with Diffusion

ZHANG Guo-hong，　WANG Xiao-li，　WANG Wen-di

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we study a Holling-Tanner predator-prey model with diffusion under the homogeneous Neumann boundary condition. First，the qualitative properties，including global attractor and persistence property，are obtained. Then，the global stability of the unique positive constant solution is investigated. Finally，we study the Turning instability in some eigenmode.

Key words：Holling-Tanner predator-prey model；global attractor；persistence property；global stability；Turning instability

责任编辑　张　枸