第 37 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2012 年 3 月
Vol. 37 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2012

文章编号:1000-5471(2012)03-0011-05

混合正态分布的收敛速度①

王 超, 陈守全, 张 耿

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 研究了混合正态分布的收敛速度,得到了一致收敛速度.

关 键 词: 正态分布;极值分布;混合分布;收敛速度

中图分类号: O211.4 **文献标志码:** A

设 $\{X_n\}_{n\in N}$ 是独立同分布随机变量序列(简记 i.i.d. 序列),其公共分布函数为 $F(x)$. 若存在常数 $a_n>0$ 和 $b_n\in\mathbb{R}$

$$P(M_n\leqslant a_n^{-1}x+b_n)\rightarrow G(x) \tag{1}$$

其中 $M_n=\max\{X_i,1\leqslant i\leqslant n\}$,$G$ 是非退化的分布函数,则 G 只能是 3 种经典极值类型[1]. 如果分布函数 F 和 G 使得(1)式成立,则称 $\{X_n\}_{n\in N}$ 的分布函数属于函数 G 的吸引场. 在(1)式中的常数 $a_n>0$ 和 b_n 称为赋范常数.

本文将证明在线性赋范条件下混合正态分布的收敛速度. 设 $F_i(i=1,2)$ 是正态分布和

$$X\in\begin{cases}N(m_1,\sigma_1^2),\text{具有概率 } p\\ N(m_2,\sigma_2^2),\text{具有概率 } q\end{cases}$$

容易得到

$$F(x)=p\,F_1(x)+qF_2(x) \tag{2}$$

则 X 称为混合正态分布(MND).

这篇文章的目的是证明混合正态分布的收敛速度. 文献[2]已经研究了两部分混合的极限的极值分布,证明了:当 $F_i(i=1,2)$ 是正态分布、柯西分布、均匀分布和截尾的指数分布时,极值分布满足极大稳定律. 对于单一正态分布变量,极值分布的极限和对应的分布收敛速度已建立. 设对任意的实数 x,$\{X_n\}_{n\in N}$ 是具有相同标准正态分布 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp(-\frac{t^2}{2})\mathrm{d}t$ 的独立随机变量序列. 对部分极大值 M_n,有

$$\lim_{n\to\infty}P\left(M_n\leqslant\frac{x}{\sqrt{2\ln n}}+\sqrt{2\ln n}-\frac{1}{2}\,\frac{\ln\ln n+\ln 4\pi}{\sqrt{2\ln n}}\right)=\exp\{-\exp(-x)\}$$

文献[3]研究了正态分布显著缓慢收敛到它的极值类型. 文献[4]证明了:如果 a_n 和 b_n 按如下方式选择

$$\frac{n\phi(a_n)}{a_n}=1,\ b_n=a_n$$

则

$$\frac{C_1}{\log n}<\sup_{-\infty<x<\infty}\mid P\{a_n(M_n-b_n)\leqslant x\}-\exp\{-\exp(-x)\}\mid\leqslant\frac{C_2}{\log n}$$

---

① 收稿日期:2010-11-02
基金项目:重庆市首届高校人才基金资助项目(120060-20600204).
作者简介:王 超(1986-),男,四川平昌人,硕士研究生,主要从事概率论与数理统计的研究.
通信作者:陈守全,副教授,硕士生导师.

其中：$\phi(x)$ 是标准正态分布的密度函数，C_1,C_2是正常数，且 $C_2 < 3$. 在此基础上文献[4] 进一步证明了，按其它方法选择 a_n 和 b_n 是不可能优于这个收敛速度的. 更多的内容见文献[5-7].

对于两部分混合的正态分布，文献[2] 中的定理 3 得到了它的极值分布. 与之相对应的收敛速度由定理 1 给出.

设$\{X_n\}_{n\in N}$ 是 i. i. d. 序列且具有标准的 $N(0,1)$ 正态分布. 众所周知，极大值 M_n 的极值分布是

$$P\{a_n(M_n - b_n) \leqslant x\} \to \exp\{-\exp(-x)\},\ n \to \infty$$

其中赋范常数

$$a_n = \sqrt{2\ln n} \qquad b_n = \sqrt{2\ln n} - \frac{\ln \ln n + \ln 4\pi}{2\sqrt{2\ln n}}$$

引理 1[2] 设$\{Z_n\}_{n\in N}$ 是独立同分布随机变量序列使得对所有 n

$$Z_n \in \begin{cases} N(m_1,\sigma_1^2)\text{，具有概率 } p \\ N(m_2,\sigma_2^2)\text{，具有概率 } q \end{cases}$$

其中 $p+q=1$. 设 $M_n^* = \max\{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}$. 如果下面二条件之一成立：

(a) $\sigma_1 > \sigma_2$，$m_1, m_2 \in R$.

(b) $\sigma_1 = \sigma_2$，$m_1 > m_2$.

则对任意实数 x，

$$\lim_{n\to\infty} P\{a_n^*(M_n^* - b_n^*) \leqslant x\} = \exp\{-\exp(-x)\} \tag{3}$$

都成立，其中

$$a_n^* = \frac{\sqrt{2\ln n}}{\sigma_1} \qquad b_n^* = m_1 + \sigma_1\sqrt{2\ln n} - \frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}\left(\ln \ln n + \ln\frac{4\pi}{p^2}\right) \tag{4}$$

做如下记号：

$$K_n = \exp\left\{-\frac{4}{4\ln n + \ln \ln n - \ln\frac{4\pi}{p^2}}\exp\left\{-\frac{1}{16\ln n}(\ln \ln n + \ln\frac{4\pi}{p^2})^2\right\}(1 + \frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta'_{n,0}}{2})\tau_n)\right\} \tag{5}$$

$$\Delta'_n = \frac{1}{2\ln n}\frac{1}{(1 - \frac{1}{4\ln n}(\ln\frac{4\pi}{p^2} + \ln \ln n))^3}(1 + \frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta_{n,0}}{2})\tau_n'^3) \tag{6}$$

$$\Lambda'_n = 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{4\ln n}(\ln \ln n - \ln\frac{4\pi}{p^2})}\exp\left\{-\frac{1}{16\ln n}(\ln \ln n - \ln\frac{4\pi}{p^2})^2\right\}(1 + \frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta'_{n,0}}{2})\tau_n) \tag{7}$$

其中 τ_n,τ'_n,$\delta_{n,0}$,$\delta'_{n,0}$ 将在定理 1 的证明中给出.

定理 1 假设$\{Z_n\}_{n\in N}$ 是独立同分布随机变量序列，具有如(2) 式所给出的相同的分布函数，对足够大的 n_0，当 $n > n_0$ 时，有

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln \ln n} |P\{a_n^*(M_n^* - b_n^*) \leqslant x\} - \exp\{-\exp(-x)\}| \leqslant 2\exp(-2)\frac{1}{n-1} +$$

$$K_n(\Delta'_n + \frac{1}{2}\Delta_n'^2\exp(\Delta'_n)) + \exp\left(-\frac{1}{\ln n}\right)(\Lambda'_n + \frac{1}{2}\Lambda_n'^2\exp(\Lambda'_n)) \tag{8}$$

其中：a_n^* 和 b_n^* 由(4) 式得出；K_n，Δ'_n 和 Λ'_n 由(5),(6) 和(7) 式给出.

证 记

$$u_n = (a_n^*)^{-1}x + b_n^* \qquad v_n = \frac{u_n - m_1}{\sigma_1} \qquad w_n = \frac{u_n - m_2}{\sigma_2}$$

注意

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln \ln n} |P\{a_n^*(M_n^* - b_n^*) \leqslant x\} - \exp\{-\exp(-x)\}| \leqslant$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln \ln n} |F^n(u_n) - \exp\{-n(1 - F(u_n))\}| +$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln \ln n} |\exp\{-n(1 - F(u_n))\} - \exp\{-n(pv_n^{-1}\phi(v_n) + qw_n^{-1}\phi(w_n))\}| +$$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln\ln n}|\exp\{-n(pv_n^{-1}\phi(v_n)+qw_n^{-1}\phi(w_n))\}-\exp\{-(-x)\}|=$$
$$L_1+L_2+L_3 \tag{9}$$

利用文献[5]中的引理 2.4.1，得到

$$L_1=\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln\ln n}|(1-n^{-1}t)^n-\exp(-t)|\leqslant 2\exp(-2)\frac{1}{n-1} \tag{10}$$

对 L_2，引用文献[8]中的引理 2.2.3，有

$$L_2=\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln\ln n}\{\exp\{-n(p(1-\Phi(v_n))+q(1-\Phi(w_n)))\}-\exp\{-n(pv_n^{-1}\phi(v_n)+qw_n^{-1}\phi(w_n))\}\}\leqslant$$
$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln\ln n}\{\exp\{-n(pv_n^{-1}\phi(v_n)+qw_n^{-1}\phi(w_n))\}\{n(pv_n^{-3}\phi(v_n)+qw_n^{-3}\phi(w_n))+$$
$$\frac{1}{2}(n(pv_n^{-3}\phi(v_n)+qw_n^{-3}\phi(w_n)))^2\exp\{\theta_1\, n(pv_n^{-3}\phi(v_n)+qw_n^{-3}\phi(w_n))\}\}\}=$$
$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \ln\ln n}\{\exp\{-n(pv_n^{-1}\phi(n)+qw_n^{-1}\phi(w_n))\}\{\Delta_n+\frac{1}{2}\Delta_n^2\exp(\theta_1\Delta_n)\}\} \tag{11}$$

其中：$0\leqslant\theta_1\leqslant 1$，$\Delta_n=n(pv_n^{-3}\phi(v_n)+qw_n^{-3}\phi(w_n))$. 令 $\delta_n=w_n^2-v_n^2=\left(\frac{u_n-m_2}{\sigma_2}\right)^2-\left(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1}\right)^2$. 如果 $\sigma_1>\sigma_2>0$，则

$$\delta_n=\left(\frac{1}{\sigma_2^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)u_n^2+Au_n+B$$

其中：$A=\frac{2m_1}{\sigma_1^2}-\frac{2m_2}{\sigma_2^2}$，$B=\frac{m_2^2}{\sigma_2^2}-\frac{m_1^2}{\sigma_1^2}$.

因为

$$u_n=\frac{\sigma_1}{\sqrt{2\ln n}}x+m_1+\sigma_1\sqrt{2\ln n}-\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}\left(\ln\ln n+\ln\frac{4\pi}{p^2}\right)$$

所以

$$m_1+\sigma_1\sqrt{2\ln n}-\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}\left(\ln\ln n+\ln\frac{4\pi}{p^2}\right)\leqslant u_n\leqslant m_1+\sigma_1\sqrt{2\ln n}+\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}\left(\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2}\right)$$

记

$$u_{n,0}=\max\left\{\frac{\sigma_1^2m_2-\sigma_2^2m_1}{\sigma_1^2-\sigma_2^2},\ m_1+\sigma_1\sqrt{2\ln n}-\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}\left(\ln\ln n+\ln\frac{4\pi}{p^2}\right)\right\}$$
$$u_{n,1}=m_1+\sigma_1\sqrt{2\ln n}+\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}\left(\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2}\right)$$

其中 $u_{n,0}=\frac{\sigma_1^2m_2-\sigma_2^2m_1}{\sigma_1^2-\sigma_2^2}$ 是抛物线方程

$$\delta_n=w_n^2-v_n^2=\left(\frac{u_n-m_2}{\sigma_2}\right)^2-\left(\frac{u_n-m_1}{\sigma_1}\right)^2$$

的对称轴. 显然有

$$\delta_{n,1}\leqslant\delta_n\leqslant\delta_{n,3}$$

其中

$$\delta_{n,1}=\left(\frac{1}{\sigma_2^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)u_{n,0}^2+Au_{n,0}+B\qquad \delta_{n,3}=\left(\frac{1}{\sigma_2^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)u_{n,1}^2+Au_{n,1}+B$$

如果 $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ 且 $m_1>m_2$，则

$$\delta_n=\{2u_n(m_1-m_2)+m_2^2-m_1^2\}\sigma_1^{-2}$$

在上述情况中，因为 $0\leqslant x\leqslant\ln\ln n$，所以得到

$$\delta_{n,2}\leqslant\delta_n\leqslant\delta_{n,4}$$

其中

$$\delta_{n,2}=\{2(m_1+\sigma_1\sqrt{2\ln n}-\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}(\ln\ln n+\ln\frac{4\pi}{p^2}))(m_1-m_2)+m_2^2-m_1^2\}\sigma_1^{-2}$$

$$\delta_{n,4}=\{2(m_1+\sigma_1\sqrt{2\ln n}+\frac{\sigma_1}{2\sqrt{2\ln n}}(\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2}))(m_1-m_2)+m_2^2-m_1^2\}\sigma_1^{-2}$$

为了方便描述，做如下记号：

$$\delta_{n,0}=\begin{cases}\delta_{n,1}，若\ \sigma_1>\sigma_2，m_1,m_2\in R，\\ \delta_{n,2}，若\ \sigma_1=\sigma_2，m_1>m_2\end{cases}\qquad \delta'_{n,0}=\begin{cases}\delta_{n,3}，若\ \sigma_1>\sigma_2，m_1,m_2\in R，\\ \delta_{n,4}，若\ \sigma_1=\sigma_2，m_1>m_2\end{cases}$$

所以，得到

$$0\leqslant\exp\left(-\frac{\delta'_{n,0}}{2}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{w_n^2-v_n^2}{2}\right)\leqslant\exp\left(-\frac{\delta_{n,0}}{2}\right)\tag{12}$$

现在，将估计$\frac{v_n}{w_n}$，

$$\frac{v_n}{w_n}=\frac{v_n}{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(v_n+\frac{m_1-m_2}{\sigma_1}\right)}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\frac{m_1-m_2}{\sigma_1}\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(v_n+\frac{m_1-m_2}{\sigma_1})\right)^{-1}$$

利用绝对值不等式得到

$$\tau_n\leqslant\frac{v_n}{w_n}\leqslant\tau'_n$$

其中

$$\tau_n=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\left|\frac{m_1-m_2}{\sigma_1}\Big/\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\sqrt{2\ln n}+\frac{1}{2\sqrt{2\ln n}}(\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2})+\frac{m_1-m_2}{\sigma_1}\right)\right)\right|$$

$$\tau'_n=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-\left|\frac{m_1-m_2}{\sigma_1}\Big/\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left(\sqrt{2\ln n}+\frac{1}{2\sqrt{2\ln n}}(\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2})+\frac{m_1-m_2}{\sigma_1}\right)\right)\right|$$

因为

$$npv_n^{-3}\phi(v_n)\leqslant\frac{1}{2\ln n}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4\ln n}(\frac{\ln 4\pi}{p^2}+\ln\ln n)\right)^3}\tag{13}$$

所以，由(12)和(13)式得到

$$\Delta_n\leqslant\frac{1}{2\ln n}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4\ln n}(\ln\frac{4\pi}{p^2}+\ln\ln n)\right)^3}\left(1+\frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta_{n,0}}{2})\tau_n'^3\right)=\Delta'_n\tag{14}$$

又因为

$$\begin{aligned}&\exp\{-n(pv_n^{-1}\phi(v_n)+qw_n^{-1}\phi(w_n))\}\leqslant\\&\exp\left\{-\exp(-x)\frac{1}{1+\frac{1}{2\ln n}(x-\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi}{p^2}-\frac{1}{2}\ln\ln n)}\exp\left\{-\frac{1}{4\ln n}(x-\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi}{p^2}-\frac{1}{2}\ln\ln n)^2\right\}\times\right.\\&\left.(1+\frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta'_{n,0}}{2})\tau_n)\right\}\leqslant\\&\exp\left\{-\frac{4}{4\ln n+\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2}}\exp\left\{-\frac{1}{16\ln n}(\ln\ln n+\ln\frac{4\pi}{p^2})^2\right\}(1+\frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta'_{n,0}}{2})\tau_n)\right\}=K_n\end{aligned}\tag{15}$$

所以，再由(14)和(15)式，得到

$$L_2\leqslant K_n(\Delta'_n+\frac{1}{2}\Delta_n'^2\exp(\Delta'_n))\tag{16}$$

现在估计 L_3.

$$L_3\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant\ln\ln n}|\exp\{-\exp(-x)\}|\left|\exp\left\{\exp(-x)-\exp(-x)\frac{1}{1+\frac{1}{2\ln n}(x+\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi}{p^2}-\frac{1}{2}\ln\ln n)}\times\right.\right.$$

$$\exp\{-\frac{1}{4\ln n}(x-\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi}{p^2}-\frac{1}{2}\ln\ln n)^2\}\Big)(1+\frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta'_{n,0}}{2})\tau_n)-1\Big| = L'_3$$

记

$$\Lambda_n = \exp(-x)-\exp(-x)\frac{1}{1+\frac{1}{2\ln n}(x-\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi}{p^2}-\frac{1}{2}\ln\ln n)}\exp\left\{-\frac{1}{4\ln n}(x-\frac{1}{2}\ln\frac{4\pi}{p^2}-\frac{1}{2}\ln\ln n)^2\right\}\times$$

$$(1+\frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta'_{n,0}}{2})\tau_n)$$

则 L'_3 变成

$$L'_3 = \sup_{0\leqslant x\leqslant\ln\ln n}|\exp\{-\exp(-x)\}||\exp(\Lambda_n)-1|$$

因为 $\exp\{\Lambda_n\}-1=\Lambda_n+\frac{1}{2}\Lambda_n^2\exp(\theta_2\Lambda_n)$，只需估计 Λ_n

$$\Lambda_n \leqslant 1-\frac{1}{1+\frac{1}{4\ln n}(\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2})}\exp\{-\frac{1}{16\ln n}(\ln\ln n-\ln\frac{4\pi}{p^2})^2\}(1+\frac{q}{p}\exp(-\frac{\delta'_{n,0}}{2})\tau_n) = \Lambda'_n$$

所以，得到

$$L_3 \leqslant L'_3 \leqslant \exp(-\frac{1}{\ln n})(\Lambda'_n+\frac{1}{2}\Lambda_n'^2\exp(\Lambda'_n)) \tag{17}$$

由(10)，(16)和(17)式证明了(8)式，定理 1 的证明已完成.

参考文献：

[1] RESNICK S. Extreme Value，Regular Variation，and Point Processes [M]. New York：Springer-Verlag，1987：39.

[2] PAVLE M. Extreme Values of the Sequences of Independent Random Variables with Mixed Distributions [J]. МАТЕМАТИЧКИ БЕСНИК，1999，51：29－37.

[3] FISHER R A，TIPPET L H C. Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smalest Member of a Sample [J]. Proc Cambrige Phill Soc，1928，24：180－190.

[4] HALL P. The Rate of Convergence of Normal Extremes [J]. J Appl Probab，1979，16：433－439.

[5] LEADBETTER M R，LINDGREN G，ROOTZEN H. Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes [M]. 2nd. New York：Springer-Verlag，1983：39－40.

[6] 刘　珂，彭作祥. 条件矩的收敛速度 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2007，29(1)：5－8.

[7] Xiong Fang，PENG Zuo-xiang. The Rate of the Convergence of Extremcs for the Erlang Distribution [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(3)：5－8.

[8] YUAN S C，HENRY T. Probability Theory：Independce，Interchange-Ability，Martingles [M]. 3rd. New York：Springer，1997.

Rate of Convergence of Extremes for Mixed Normal Distributions

WANG Chao，CHEN Shou-quan，ZHANG Geng

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：In this paper，we study the rate of convergence of mixed normal distributions and obtain the uniform convergence rate.

Key words：normal distribution；extreme value distribution；mixed distribution；rate of convergence

责任编辑　张　枸