第 37 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2012 年 3 月
Vol. 37 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2012

文章编号:1000-5471(2012)03-0001-05

测度链上一阶非线性边值问题的多解性①

王国兴

兰州商学院 信息工程学院,兰州 730020;兰州商学院 商务信息技术实验教学中心,兰州 730020

摘要:讨论如下测度链上一阶非线性边值问题

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(x(\sigma(t))),\ t \in [0,\ T]_{\mathbf{T}} \\ x(0) = \eta x(\sigma(T)) \end{cases}$$

通过运用 Krasnosel'skii's 不动点定理并联合 Leggett-Williams 不动点定理获得该问题 4 个正解的存在性准则.

关 键 词:测度链;边值问题;正解;不动点

中图分类号:O175.9 **文献标志码**:A

记 $\mathbf{T}$ 为测度链,即 $\mathbf{T}$ 是 $\mathbb{R}$ 的非空闭子集. 令 $0, T \in \mathbf{T}$,记 $(0,\ T)_{\mathbf{T}} := (0,\ T) \cap \mathbf{T}$,其他区间类似定义. 自文献[1]中首次提出测度链以来,测度链上动力方程理论已经成为一个新的数学分支[2-6]. 同时,测度链上动力方程边值问题受到了数学工作者的广泛关注[7-21].

考虑如下测度链上一阶非线性边值问题多个正解的存在性

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(x(\sigma(t))),\ t \in [0,\ T]_{\mathbf{T}} \\ x(0) = \eta x(\sigma(T)) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $T > 0$ 固定,$0, T \in \mathbf{T}$,f:$[0,\ \infty) \longrightarrow [0,\ \infty)$ 连续.

文献[20]讨论了问题(1),通过运用 Avery-Henderson 不动点定理[22],获得了该问题 2 个正解的存在性结果(有关三解定理在边值问题中的应用还可见文献[23-24]).

文献[17]讨论了测度链上一类 p - Laplacian 泛函动力方程. 通过运用一个新的不动点定理(即 Krasnosel'skii's 不动点定理联合 Leggett-Williams 不动点定理)获得了相关问题多个正解的存在性结果.

受文献[17]和文献[20]启发,考虑问题(1)至少 4 个正解的存在性.

有关测度链的相关定义及性质参见文献[3-5,11].

下面给出一些基本定义和宋翁不动点定理.

定义 1 设 E 是 Banach 空间. E 的一个非空闭凸子集 P 称为锥,若满足如下条件:

(i) 若 $x \in P$,$\lambda \geqslant 0$,则 $\lambda x \in P$;

(ii) 若 $x \in P$,$-x \in P$,则 $x = 0$.

E 中的每一个锥 P 诱导出 E 中的一个序:$x \leqslant y$ 当且仅当 $y - x \in P$.

定义 2 设 E 是 Banach 空间,P 是 E 中的一个锥. 函数 α:$P \longrightarrow [0,\ \infty)$ 称为一个非负连续凹函数若 α 连续且

$$\alpha(tx + (1-t)y) \geqslant t\alpha(x) + (1-t)\alpha(y)$$

对所有 $x, y \in P$ 以及 $t \in [0,\ 1]$ 成立.

---

① 收稿日期:2010-01-05

基金项目:国家自然科学基金项目(11001287).

作者简介:王国兴(1976-),男,甘肃天水人,副教授,硕士,主要从事应用微分方程与图论的研究.

令 $a,b,c>0$ 是常数，记 $P_c=\{x\in P:\|x\|<c\}$，$P(\alpha,a,b)=\{x\in P:a\leqslant\alpha(x),\ \|x\|\leqslant b\}$. 以下为宋翁不动点定理[17].

定理 A 设 P 是实 Banach 空间 E 中的一个锥. $F:P\longrightarrow P$ 全连续，α 是定义在锥 P 上的一个非负连续凹函数且满足：$\alpha(x)\leqslant\|x\|$ 对所有的 $x\in\overline{P}_\rho$ 成立. 假设存在 $0<d<a<b\leqslant c<\rho$ 使得如下条件成立：

(i) $\{x\in P(\alpha,a,b):\alpha(x)>a\}\neq\varnothing$，对所有 $x\in P(\alpha,a,b)$，$\alpha(Fx)>a$ 成立；

(ii) $\|Fx\|<d$，$x\in\overline{P}_d$；

(iii) $\alpha(Fx)>a$，$x\in P(\alpha,a,c)$ 且 $\|Fx\|>b$；

(iv) $\|Fx\|\leqslant c$，$x\in\overline{P}_c$；

(v) $\|Fx\|\geqslant\|x\|$，$x\in\partial P_\rho$.

则 F 在 $\overline{P}_\rho$ 中至少存在 4 个不动点 x_1,x_2,x_3,x_4 满足 $\|x_1\|<d$，$\alpha(x_2)>a$，$d<\|x_3\|$ 且 $\alpha(x_3)<a$，$c<\|x_4\|\leqslant\rho$.

注 1 定理 A 结论仍然成立若把条件(v) 替换为以下条件：

(v_1) $\alpha(Fx)\geqslant\rho$，$x\in\partial P_\rho$.

在本文中始终假设 $0<\eta<1$ 且 $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 连续.

注意到 $x(t)$ 是 BVP(1) 的解当且仅当

$$x(t)=\frac{1}{1-\eta}\left[\int_0^t f(x(\sigma(s)))\Delta s+\eta\int_t^{\sigma(T)}f(x(\sigma(s)))\Delta s\right]$$

令 $E=\{x\mid x:[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}\longrightarrow\mathbb{R}\text{ 连续}\}$，其上的范数定义为 $\|x\|=\max\limits_{t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}}|x(t)|$，故 E 是 Banach 空间. 定义锥 $P\subset E$ 为

$$P=\{x\in E\mid x\text{ 是不减函数且 }x(t)\geqslant\eta\|x\|,\ t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}\}$$

定义算子 $F:P\longrightarrow E$ 为

$$(Fx)(t)=\frac{1}{1-\eta}\left[\int_0^t f(x(\sigma(s)))\Delta s+\eta\int_t^{\sigma(T)}f(x(\sigma(s)))\Delta s\right],\ t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}$$

引理 1[20] $F:P\longrightarrow P$ 全连续.

在 P 上定义非负连续凹函数 α 如下

$$\alpha(x)=\min_{t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}}x(t)$$

显然，$\forall x\in P$，$\alpha(x)\leqslant\|x\|$.

定理 2 设 $0<d<a<\dfrac{a}{\eta}\leqslant c$，$f$ 满足如下条件：

(H_1) $f(x)<\dfrac{(1-\eta)d}{\sigma(T)}$，$0\leqslant x\leqslant d$；

(H_2) $f(x)\leqslant\dfrac{(1-\eta)c}{\sigma(T)}$，$0\leqslant x\leqslant c$；

(H_3) $f(x)>\dfrac{(1-\eta)a}{\eta\,\sigma(T)}$，$a\leqslant x\leqslant\dfrac{a}{\eta}$；

(H_4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}\geqslant\dfrac{(1-\eta)}{\eta\,\sigma(T)}$.

则 BVP(1) 至少存在 4 个正解 x_1,x_2,x_3,x_4 满足 $\|x_1\|<d$，$\alpha(x_2)>a$，$d<\|x_3\|$ 且 $\alpha(x_3)<a$，$c<\|x_4\|$.

证 首先证明 $F:\overline{P}_c\longrightarrow\overline{P}_c$.

事实上，若 $x\in\overline{P}_c$，则根据引理 1 有 $F\overline{P}_c\subset P$. 而且 $\forall x\in\overline{P}_c$，有 $0\leqslant x\leqslant c$，根据(H_2) 得到

$$(Fx)(t)=\frac{1}{1-\eta}\left[\int_0^t f(x(\sigma(s)))\Delta s+\eta\int_t^{\sigma(T)}f(x(\sigma(s)))\Delta s\right]\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\eta}\int_0^{\sigma(T)}f(x(\sigma(s)))\Delta s\leqslant$$

$$\frac{1}{1-\eta}\int_0^{\sigma(T)}\frac{(1-\eta)c}{\sigma(T)}\Delta s=c$$

因此，$\|Fx\|\leqslant c$，即 $F:\overline{P}_c\longrightarrow\overline{P}_c$.

由(H_1)，与以上讨论类似有 $F:\overline{P}_d\longrightarrow P_d$.

其次证明：$\{x\in P(\alpha,a,b):\alpha(x)>a\}\neq\varnothing$ 且对于所有 $x\in P(\alpha,a,b)$，$\alpha(Fx)>a$ 成立.

令 $x=\frac{a}{\eta}$，则 $x\in P$，$\|x\|=\frac{a}{\eta}$ 从而 $\alpha(x)=\frac{a}{\eta}>a$. 取 $b=\frac{a}{\eta}$，则有 $\{x\in P(\alpha,a,b):\alpha(x)>a\}\neq\varnothing$. 又由于 $\forall x\in P(\alpha,a,b)$，有 $a\leqslant x(t)\leqslant\frac{a}{\eta}$，$t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}$，则根据($H_3$)得到

$$\begin{aligned}\alpha(Fx)=&(Fx)(0)=\\&\frac{\eta}{1-\eta}\int_0^{\sigma(T)}f(x(\sigma(s)))\Delta s>\\&\frac{\eta}{1-\eta}\int_0^{\sigma(T)}\frac{(1-\eta)c}{\eta\sigma(T)}\Delta s=a\end{aligned}$$

再次证明：对所有 $x\in P(\alpha,a,c)$ 且 $\|Fx\|>b$，$\alpha(Fx)>a$ 成立.

令 $x\in P(\alpha,a,c)$ 且 $\|Fx\|>b$，则有

$$\alpha(Fx)=\min_{t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}}(Fx)(t)\geqslant\eta\|Fx\|>\eta b=a$$

最后证明：$\|Fx\|\geqslant\|x\|$，$x\in\partial P_\rho$.

由(H_4)，选取 $\rho>\frac{a}{\eta}$ 充分大使得

$$f(x)\geqslant\frac{(1-\eta)x}{\eta\sigma(T)}\qquad x\geqslant\rho\eta$$

令 $x\in\partial P_\rho$，则有

$$x(t)\geqslant\eta\|x\|=\rho\eta,\ t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}$$

故

$$\begin{aligned}\|Fx\|=&(Fx)(\sigma(T))=\\&\frac{1}{1-\eta}\int_0^{\sigma(T)}f(x(\sigma(s)))\Delta s\geqslant\\&\frac{1}{1-\eta}\int_0^{\sigma(T)}\frac{(1-\eta)}{\eta\sigma(T)}\min_{t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}}x(t)\Delta s\geqslant\\&\frac{1}{\eta}\min_{t\in[0,\sigma(T)]_{\mathbf{T}}}x(t)\geqslant\|x\|\end{aligned}$$

综上，定理 A 的所有条件都满足. 因此，F 至少存在 4 个不动点，即 BVP(1) 至少存在 4 个正解 x_1,x_2,x_3,x_4 满足 $\|x_1\|<d$，$\alpha(x_2)>a$，$d<x_3\|$ 且 $\alpha(x_3)<a$，$c<\|x_4\|\leqslant\rho$.

根据注 1，有如下结论：

定理 3　设 $0<d<a<\frac{a}{\eta}\leqslant c<\rho$，$f$ 满足定理 2 的条件(H_1)－(H_3)以及如下条件

(H_5) $f(x)\geqslant\frac{(1-\eta)\rho}{\eta\sigma(T)}$，$\eta\rho\leqslant x\leqslant\rho$.

则 BVP(1) 至少存在 4 个正解 x_1,x_2,x_3,x_4 满足 $\|x_1\|<d$，$\alpha(x_2)>a$，$d<\|x_3\|$ 且 $\alpha(x_3)<a$，$c<\|x_4\|\leqslant\rho$.

例　令 $\mathbf{T}=[0,\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{2},1]$. 取 $T=1$，$\eta=\frac{1}{2}$ 以及

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{8}{3}x-\frac{7}{3} & 1\leqslant x\leqslant 2\\ 3 & 2\leqslant x\leqslant 8\\ 2x-13 & x\geqslant 8\end{cases}$$

选取 $d=1$，$a=2$，$c=8$，$\rho=26$，则有 $0<d<a<\frac{a}{\eta}\leqslant c$，且 $f(x)$ 满足：

1）当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=\frac{(1-\eta)d}{\sigma(T)}$；

2）当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，$f(x)=3>2=\frac{(1-\eta)a}{\eta\sigma(T)}$；

3）当 $0\leqslant x\leqslant 8$ 时，$f(x)\leqslant 3<4=\frac{(1-\eta)c}{\sigma(T)}$；

4）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=2>1=\frac{(1-\eta)}{\eta\sigma(T)}$.

故由定理2，BVP(1) 至少存在4个正解 x_1,x_2,x_3,x_4 满足 $\|x_1\|<1$，$\alpha(x_2)>2$，$1<\|x_3\|$ 且 $\alpha(x_3)<2$，$8<\|x_4\|\leqslant 26$.

参考文献：

[1] HILGER S. Analysis on Measure Chains-a Unified Approach to Continuous and Discrete Calculus [J]. Results Math，1990，18(1)：18－56.

[2] AGARWAL R，BOHNER M. Quadratic Functionals for Second Order Matrix Equations on Time Scales [J]. Nonlinear Anal，1998，33(7)：675－692.

[3] AGARWAL R，BOHNER M. Basic Calculus on Time Scales and Some of Its Applications [J]. Results Math，1999，35(1)：3－22.

[4] BOHNER M，PETERSON A. Dynamic Equations on Time Scales：An Introduction with Applications [M]. Birkhauser Boston，2001.

[5] BOHNER M，PETERSON A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales [M]. Birkhauser Boston，2003.

[6] KAYMAKCALAN B，LAKSHMIKANTHAM V，SIVASUNDARAM S. Dynamical Systems on Measure Chains [M]. Boston：Kluwer Academic Publishers，1996.

[7] AGARWAL R，BOHNER M，WONG P. Sturm-Liouville Eigenvalue Problems on Time Scales [J]. Appl Math Comput，1999，99(2－3)：153－166.

[8] ANDERSON D. Solutions to Second-order Three-point Problems on Time Scales[J]. J Difference Equations Appl，2002，8(8)：673－688.

[9] ANDERSON D，AVERY R，HENDERSON J. Existence of Solutions For a One Dimensional p-Laplacian on Time-scales [J]. J Difference Equations Appl，2004，10(10)：889－896.

[10] AKIN E. Boundary Value Problems for a Differential Equation on a Measure Chain [J]. Panamer Math，2000，10(1)：17－30.

[11] ATICI F，GUSEINOV G. On Green's Functions and Positive Solutions for Boundary Value Problems on Time Scales [J]. J Comput Appl Math，2002，141(1－2)：75－99.

[12] CHYAN C，HENDERSON J. Eigenvalue Problems for Nonlinear Differential Equations on a Measure Chain [J]. J Math Anal Appl，2000，245(2)：547－559.

[13] ERBE L，PETERSON A. Positive Solutions for a Nonlinear Differential Equation on a Measure Chain [J]. Math Comput Modelling，2000，32(5－6)：571－585.

[14] HENDERSON J. Multiple Solutions for $2m^{th}$-order Sturm-Liouville Boundary Value Problems on a Measure Chain [J]. J Difference Equations Appl，2000，6(4)：417－429.

[15] HENDERSON J，TISDELL C. Topological Transversality and Boundary Value Problems on Time Scales [J]. J Math Anal Appl，2004，289(2)：110－125.

[16] PETERSON A，RAFFOUL Y，TISDELL C. Three Point Boundary Value Problems on Time Scales [J]. J Difference Equations Appl，2004，10(9)：843－849.

[17] SONG Chang-xiu，WENG Pei-xuan. Multiple Positive Solutions for p-Laplacian Functional Dynamic Equations on Time Scales [J]. Nonlinear Anal，2008，68(2)：208－215.

[18] SUN Hong-rui，LI Wan-tong. Positive Solutions for Nonlinear m-point Boundary Value Problems on Time Scales [J].

Acta Math Sinica，2006，49(4)：369－380.

[19] SUN Jian-ping，LI Wan-tong. Positive Solution for Sysdtem of Nonlinear First-Order PBVPs on Time Scales [J]. Nonlinear Anal，2005，62(3)：131－139.

[20] SUN Jian-ping. Twin Positive Solutions of Nonlinear First-order Boundary Value Problems on Time Scales [J]. Nonlinear Anal，2008，68(6)：1754－1758.

[21] WANG Da-bin. Existence，Multiplicity and Infinite Solvability of Positive Solutions for p-Laplacian Dynamic Equations on Time Scales [J]. Electronic J Differential equations，2006，96：1－10.

[22] AVERY R，CHYAN C，HENDERSON J. Twin Solutions of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations and Finite Difference Equations [J]. Comput Math Appl，2001，42(3－5)：695－704.

[23] 王大斌，孔芳弟. 一类 n 阶差分方程特征值问题的正解 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2005，30(4)：629－632.

[24] FU Qiang，ZHANG Er-mi. Triple Positive Solutions of a Kind of Nonlinear Boundary Value Problem [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2007，32(3)：23－27.

Multiple Positive Solutions to Nonlinear First-Order Boundary Value Problems on Time Scales

WANG Guo-xing

School of Information Engineering，Lanzhou University of Finance and Economics，Lanzhou，Gansu 730020，China；

Experimental Teaching Center of Business Information Technology，Lanzhou University of Finance and Economics，Lanzhou 730020，China

Abstract：In this paper，existence criteria of four positive solutions to the following nonlinear first-order boundary value problem on time scales

$$\begin{cases} x^{\Delta}(t) = f(x(\sigma(t)))，t \in [0，T]_T \\ x(0) = \eta x(\sigma(T)) \end{cases}$$

are established by using the fixed-point theorem which combines Krasnosel′skii′s fixed-point theorem with the Leggett-Williams fixed-point theorem. An example is given to illustrate the significance of the main results obtained.

Key words：time scale；boundary value problem；positive solution；fixed point

责任编辑　张　枸