文章编号:1000-5471(2012)02-0142-05

# 关于曲线积分与曲面积分教学的探讨①

江　蓉，　王守中

广东石油化工学院 理学院，广东 茂名 525000

**摘要：** 高等数学作为一门重要的基础课，具有高度的抽象性、严谨性和广泛的应用性. 很多学生在该课程的学习过程中会感到十分困难，不易掌握曲线积分学和曲面积分学的知识. 为了帮助学生学好相关知识，提高课堂教学质量，从 3 个方面对曲线积分和曲面积分的教学进行了探讨.

**关　键　词：** 曲线积分；曲面积分；教学

**中图分类号：** O172.2；G642　　　　**文献标志码：** A

高等数学是我国高等院校理工科专业的一门重要基础课，具有高度的抽象性及严谨性，同时也具有广泛的应用性. 因此，这门课程成为了理工科学生学习后续专业课程以及解决实际问题的重要工具[1]. 不仅如此，学习这门课程也可以培养学生抽象思维的能力. 然而，多数学生在学习过程中会感到十分困难. 尤其是在学习多元函数积分学时，由于涉及到的积分类型很多，各类积分间有内在联系，学生对于这些知识点的学习，特别是曲线积分和曲面积分的学习常常感到困惑，难以掌握. 为了帮助学生掌握好相关知识，对曲线积分和曲面积分的教学进行深入探讨十分必要. 因为曲线积分和曲面积分有很多相似之处，故在教学时应该采用合理的教学方法，抓住它们的共性和个性来改进教学，以获得良好的教学效果. 本文从以下几个方面进行讨论.

## 1　在教学中突出曲线积分和曲面积分的概念间的联系与区别

曲线积分和曲面积分是高等数学中多元函数积分学的教学重点和难点，涉及到的概念很多，包括了定积分、二(三) 重积分、第一类及第二类曲线积分、第一类及第二类曲面积分等，其计算方法各有不同但又彼此相关，因此学生学习时会感到困难. 但是，这些概念的本质与定积分是一脉相承的，均体现了"分割、取近似、求和、取极限" 的积分思想，因此它们具有结构上的共性，可以统一表示为

$$\int_{\Omega} f(P)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0} f(P_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $\Omega$ 代表某种几何体，$f(P)$ 为点函数，$\|\Delta\sigma\|$ 表示分割后各直径的最大值 $P_i \in \Delta\sigma_i$，$P \in \Omega$. 其个性在于 $\Omega$ 代表分段光滑的曲线弧(曲线积分)、分片光滑的有界曲面(曲面积分)，$\mathrm{d}\sigma$ 表示弧长元素(曲线积分)、曲面面积元素(曲面积分)[2]. 正是因为各种类型积分的这种内在统一性，故在教学过程中可通过采用类比、化归的教学方法，使学生掌握各种类型积分的本质与其内在联系和区别，为学生学习曲线积分和曲面积分的计算打下坚实的基础[3].

---

① 收稿日期：2011-02-16

作者简介：江　蓉(1970-)，女，广东茂名人，副教授，主要从事图论方向的研究.

## 2　多层次、多角度地进行曲线积分和曲面积分计算的教学

无论是曲线积分还是曲面积分的计算，最终都可归结为一元函数定积分的计算，因此定积分的计算就成为了曲线积分和曲面积分计算的基础.

### 2.1　曲线积分的计算

第一类及第二类曲线积分的计算都是通过各自的计算公式将其化为定积分来计算的. 两类曲线积分计算最大的差别在于：第一类曲线积分与积分曲线的方向无关，且第一类曲线积分化为定积分时，其下限必须小于上限；第二类曲线积分与积分曲线的方向有关，且第二类曲线积分化为定积分时，其下限与上限分别对应着积分弧段的起点和终点. 虽然两类曲线积分有着本质的差别，但是二者之间也可以通过公式

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

进行相互转化，其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 分别表示有向曲线弧 $L$ 在点$(x, y, z)$处的切向量的方向角.

### 2.2　曲面积分的计算

曲面积分的计算类似于曲线积分的计算. 第一类及第二类曲面积分的计算也是通过不同的计算公式将其转化为二重积分的计算. 二者在计算时都必须将曲面向坐标面进行投影，得到二重积分的积分区域，将二重积分再化为二次积分，最终转化为定积分来计算. 然而，特别要注意在计算第二类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

时，要将有向积分曲面 $\sum$ 分别向 3 个坐标面进行投影，与此同时必须强调第一类曲面积分的计算与曲面的方向无关，而第二类曲面积分与曲面所选择的侧有密切的关系. 同样，两类曲面积分之间亦可以通过公式

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

相互转化，其中 $\alpha,\beta,\gamma$ 分别表示有向曲面 $\sum$ 在点$(x, y, z)$处的法向量的方向角.

通过对曲线积分和曲面积分计算方法的探讨可以看到，二者有诸多相似之处. 因此，教师在教学中要善于引导学生发挥其主观能动性，使其发现曲线积分与曲面积分在计算方法上的共性和区别，使学生真正掌握这些计算方法，以获得良好的教学效果.

### 2.3　在课堂教学中加强各类积分相互转化的训练

鉴于格林(高斯)公式可将二重(三重)积分与曲线(曲面)积分进行互化，斯托克斯公式又建立了曲面积分和曲线积分的联系，且两类曲线(曲面)积分亦可以进行相互转化，使复杂问题得到简单化，因此在曲线积分和曲面积分计算的教学过程中要加强一题多解的训练及各类积分相互转化的训练，使学生能够更好地掌握曲面积分和曲线积分的计算[1]. 下面，通过几个例题来加以讨论.

**例1**[4]　计算对坐标的曲线积分 $\int_L (xy+x)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{2}\mathrm{d}y$，其中 $L$ 是 $x^2+y^2=R^2$ 的第一象限上由点$(0, R)$到$(R, 0)$的一段弧.

**解**　方法 1：用直角坐标计算. 把 $L$ 的方程表示为：$y=\sqrt{R^2-x^2}$，$x$ 从 0 变到 $R$，则

$$\int_L (xy+x)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{2}\mathrm{d}y = \int_0^R (x\sqrt{R^2-x^2}+x)\mathrm{d}x + \int_0^R \left(\frac{x^2}{2}\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}R^2$$

方法 2：用参数方程计算. 此时，$L$ 的参数方程为：$x=R\cos t$，$y=R\sin t$，$t$ 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到 0，于是

$$\int_L (xy+x)\mathrm{d}x + \frac{x^2}{2}\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (R\cos tR\sin t + R\cos t)R(-\sin t)\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{2}R^2\cos^2 tR\cos t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}R^2$$

方法 3：利用曲线积分与路径无关的条件计算.

因为$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=x$在$xoy$面(单连通区域)上恒成立，故该曲线积分与路径无关. 于是改变积分路径，沿折线$(0,R)$——$(0,0)$——$(R,0)$作积分，得

$$\int_L (xy+x)\mathrm{d}x+\frac{x^2}{2}\mathrm{d}y=\int_R^0 0\mathrm{d}y+\int_0^R x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}R^2$$

方法4：分项组合，求$u(x,y)$，得

$$\int_L (xy+x)\mathrm{d}x+\frac{x^2}{2}\mathrm{d}y=\int_L (xy\mathrm{d}x+\frac{x^2}{2}\mathrm{d}y)+\int_L x\mathrm{d}x=$$

$$\int_{(0,R)}^{(R,0)}\mathrm{d}(\frac{x^2}{2}y)+\int_{(0,R)}^{(R,0)}\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)=\left[\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}x^2\right]\Big|_{(0,R)}^{(R,0)}=\frac{1}{2}R^2$$

**例2**[4] 计算$\oint_\Gamma x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z$，其中$\Gamma$是球面$x^2+y^2+z^2=5$与旋转抛物面$z=1+x^2+y^2$的交线，从$oz$轴正方向看去为顺时针方向.

**解** 方法1：用参数方程计算. 由于

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=5\\ z=1+x^2+y^2\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2\end{cases}$$

则

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=2\end{cases}$$

其中$t$从$2\pi$变到0，故

$$\oint_\Gamma x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z=$$

$$\int_{2\pi}^0[\cos^2t\cdot\sin t\cdot 2(-\sin t)+(\cos^2t+\sin^2t)\cos t]\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

方法2：转化为平面曲线积分.

曲线$\Gamma$：$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=2\end{cases}$在$xoy$坐标面上的投影曲线为$L$：$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$(顺时针方向)，则

$$\oint_\Gamma x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z=$$

$$\oint_\Gamma 2x^2y\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y=-\iint_D(2x-2x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-2\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\cos^2\theta\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$

方法3：利用斯托克斯公式，有

$$\oint_\Gamma x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z=$$

$$\iint_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2yz & x^2+y^2 & x+y+1\end{vmatrix}=\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2y-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(2x-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$\sum$是以$\Gamma$为边界的曲面. $\sum$可以取平面$z=2$（$x^2+y^2\leqslant 1$），也可以取曲面$z=1+x^2+y^2$，还可以取球面$x^2+y^2+z^2=5$.

若$\sum$取平面$z=2$（$x^2+y^2\leqslant 1$），则需取其下侧. 由于$z=2$在$zox$面及$yoz$面上的投影为零，故

$$\iint_{\sum}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\sum}(x^2y-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$$

因而

$$\oint_{\Gamma}x^2yz\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+1)\mathrm{d}z=$$

$$\iint_{\sum}(2x-x^2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{Dxy}(2x-2x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}$$

其中$Dxy$为$\sum$在$xoy$面上的投影区域，即$x^2+y^2\leqslant 1$.

**例 3**[1]　计算曲面积分$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是旋转抛物面$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面$z=0$及$z=2$之间的部分的下侧.

**解**　*方法 1*：将其化为对同一个坐标面投影的对坐标的曲面积分. 由两类曲面积分之间的关系，可得

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在曲面上向下的法向量为$(x,y,-1)$，则

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\qquad\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\qquad\mathrm{d}S=\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)(-x)-z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot(-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

注意到

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\frac{x}{4}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

故

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)r\mathrm{d}r=8\pi$$

*方法 2*：将对坐标的曲面积分化为对面积的曲面积分. 由两类曲面积分之间的关系，可得

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}[(z^2+x)\cos\alpha-z\cos\gamma]\mathrm{d}S=$$

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\{[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x]\cdot x-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot(-1)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}\frac{x}{4}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)r\mathrm{d}r=8\pi$$

通过以上 3 道例题的解法可以看到，同一个积分问题的解决方法很多，而这些不同的方法体现了曲线积分和曲面积分计算间的联系. 通过相互转化，往往使得很多问题的计算难度大大降低，也使得很多

积分的计算简单化，因此使学生对这些知识点融会贯通，故在曲线积分和曲面积分的教学中需要强化这方面的训练.

## 3 通过曲线积分和曲面积分的学习，加强对学生的素质教育

数学来源于实践，又是为实践服务的. 因此，在曲线积分和曲面积分的教学过程中，有必要指明它们的物理意义和几何意义，同时也要有针对性地引导学生思考这些数学知识可以帮助工程技术人员解决哪些现实问题，真正做到学以致用，培养学生的“用数学”的能力，使学生的抽象思维能力、分析问题的能力、解决问题的能力及综合素质不断提高.

**参考文献：**

[1] 同济大学. 高等数学：下册 [M]. 6版. 北京：高等教育出版社，2007：185－247.

[2] 刘寿春. 谈多元函数积分学的教学 [J]. 合肥学院学报：自然科学版，2004，14(1)：85－87.

[3] 张 杰，侯为波. 多元函数积分学的教学探讨 [J]. 淮北煤炭师范学院学报：自然科学版，2010，31(2)：74－77.

[4] 龚漫奇. 高等数学习题课教程：下册 [M]. 北京：科学出版社，2001：162－172.

[5] 肖 红. 广义 Minty 四变分不等式解的性质 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2010，32(10)：126－131.

[6] 李红婷. 高师“数学教学论”课程建设的反思与重构 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(3)：196－200.

[7] 闵 兰，陈晓敏.《线性代数》研究性教学案例 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(3)：206－208.

# Discussion on Teaching of Curvilinear Integral and Surface Integral

JIANG Rong， WANG Shou-zhong

*School of Sciences，Guangdong Institute of Petrochemical Technology，Maoming Guangdong 525000，China*

**Abstract**：Higher mathematics is an important elementary course . It is highly abstract and exact，and it is used widely. It is very difficult for students to study the course，especially curvilinear integral and curved surface integral. In order to help students master the related knowledge，a discussion is presented in this paper on the teaching of curvilinear integral and surface integral from three aspects.

**Key words**：curvilinear integral；curved surface integral；teaching

责任编辑 廖 坤