第 37 卷 第 2 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2012 年 2 月
Vol. 37 No. 2 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Feb. 2012

文章编号:1000-5471(2012)02-0034-04

非凸变分不等式和 Wiener-Hopf 方程的逼近方法①

龚黔芬[1], 闻道君[2]

1. 重庆工商大学 计算机与信息工程学院,重庆 400067;2. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067

摘要: 介绍了一类新的包含非扩张映象的 Wiener-Hopf 方程,建立了非凸变分不等式问题与 Wiener-Hopf 方程的等价关系,进一步给出了求解非扩张映象不动点和 Wiener-Hopf 方程的逼近方法,并在一定条件下证明了由该方法所产生的迭代序列的强收敛性.

关 键 词: 非凸变分不等式;Wiener-Hopf 方程;近似正规锥;松弛 (γ, r)-余强制;不动点

中图分类号: O177.91 **文献标志码:** A

近年来,变分不等式问题已经被许多学者深入研究,并获得了一系列很好的结果[1-6].讨论各种变分不等式问题解的存在性和有效数值解法有着重要的理论意义和实用价值.最近,文献[7-8]基于非线性凸分析和非光滑分析的观点,给出了一致近似正规集(非凸集)的定义.在此基础上,文献[9-10]研究了一类非凸变分不等式问题:设 T 为非线性算子,K_r 为 Hilbert 空间 H 中的非凸子集,求 $u \in K_r$,使得

$$\langle Tu, v-u \rangle \geqslant 0 \qquad \forall v \in K_r \tag{1}$$

进一步建立了求解非凸变分不等式问题的投影算法,并在算子 T 具有强单调性的条件下证明了相应迭代序列的收敛性.

另一方面,Wiener-Hopf 方程与变分不等式问题存在紧密的联系.为了方便表示,设 $Q_{K_r} = I - SP_{K_r}$,其中 P_{K_r} 是投影算子,I 是单位算子,S 为非扩张映象.对于给定的非线性算子 T,求 $z \in H$,满足

$$TSP_{K_r}z + \rho^{-1}Q_{K_r}z = 0 \tag{2}$$

称(2)式为非线性 Wiener-Hopf 方程,当 $r=\infty$,$S=I$ 时,(2)式便是求解经典变分不等式问题的辅助 Wiener-Hopf 方程.

本文将引入非扩张映象 S,利用 Wiener-Hopf 方程技巧进一步研究非凸变分不等式的迭代逼近问题:设 K_r 为 Hilbert 空间 H 中的非凸子集,定义一个新的求解非凸变分不等式问题的迭代算法:对给定的 $z_0 \in H$,由

$$\begin{cases} u_n = SP_{K_r}z_n \\ z_{n+1} = (1-\alpha_n)z_n + \alpha_n(u_n - \rho Tu_n) \end{cases} \tag{3}$$

计算 z_{n+1},其中 $\alpha_n \in (0, 1)$,且 P_{K_r} 表示 H 在非凸集 K_r 上的投影.

本文的目的是利用非凸变分不等式和非线性 Wiener-Hopf 方程的等价性,建立求解非扩张映象不动点和 Wiener-Hopf 方程的逼近方法,并且在收敛性分析中将对算子 T 的限制条件从强单调减弱到松弛 (γ, r)-

---

① 收稿日期:2010-09-12
基金项目:国家自然科学基金(11001287);重庆市自然科学基金(CSTC 2010BB9254);重庆市教委科技研究项目(KJ 110701).
作者简介:龚黔芬(1977-),女,四川梓潼人,讲师,主要从事计算机应用与算法的研究.

余强制，所得的结果改进并推广了文献[4,9－10]中相应的结论.

设 H 是一个实 Hilbert 空间，其内积和范数分别表示为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 和 $\|\cdot\|$，K 是 H 中的非空凸集. 首先，我们介绍一些文献[7－8]中的基本概念和结论.

设 u 为 Hilbert 空间 H 中的一点，以 $d_K(u)=\inf_{v\in K}\|v-u\|$ 表示 H 到 K 的距离，称

$$N_K^P(u)=\{\xi\in H:u\in P_K[u+\alpha\xi],\ \alpha>0\}$$

为 K 在 u 点的近似正规锥，其中

$$P_K[u]=\{u^*\in K:d_K(u)=\|u-u^*\|\}$$

称 $N_K^C(u)=\overline{co}[N_K^P(u)]$ 为 Clarke 正规锥，其中 $\overline{co}$ 表示凸集的闭包. 显然，$N_K^P(u)\subset N_K^C(u)$，且 $N_K^C(u)$ 是闭凸集，但近似正规锥 $N_K^P(u)$ 是凸集，却不一定是闭集[8].

设 K_r 为 H 中的一个非空子集. 对给定的常数 $r\in(0,\infty]$，如果 K_r 的每一个非零近似正规锥 $N_{K_r}^P(u)$ 都可以表示为一个 r-球，即对任意的 $u\in K_r$ 和 $0\neq\xi\in N_{K_r}^P(u)$，满足

$$\langle\frac{\xi}{\|\xi\|},v-u\rangle\leqslant\frac{1}{2r}\|v-u\|^2\qquad\forall v\in K_r$$

则称 K_r 为一致近似正规集.

从文献[7－8]可知，一致近似正规集包含凸集、p-凸集、H 中的 $C^{1,1}$ 子流形(可能包含边界)等类型的凸集和非凸集. 如果 $r=\infty$，则一致近似正规集 K_r 与 K 等价，即 $K_r=K$；如果 K_r 是一致近似正规集，则近似正规锥 $N_{K_r}^P(u)$ 是闭的集值映象，所以 $N_{K_r}^P(u)=N_{K_r}^C(u)$.

引理 1[8-9]　设 K 为 H 的非空闭子集，如果 $K_r=\{u\in H:d(u,K)<r\}$ 是一致近似正规集，则

(i) $\forall u\in K_r$，$P_{K_r}(u)\neq 0$；

(ii) $\forall r'\in(0,r)$，P_{K_r} 是 δ-Lipschitz 连续算子，其中 $\delta=\frac{r}{r-r'}$ 是常数；

(iii) 近似正规锥 $N_{K_r}^P(u)$ 是闭的集值映象.

引理 2[9,11]　$u\in K_r$ 为非凸变分不等式(1)的解的充分必要条件是 $u=P_{K_r}[u-\rho Tu]$，其中 $P_{K_r}=(I+N_{K_r}^P)^{-1}$ 为 H 在一致近似正规集 K_r 上的投影.

本文引用文献[3]中的基本概念和基本结论，设 T 为松弛(γ,r)-余强制映象. 从文献[3]可知，松弛$(0,r)$-余强制映象即 r-强单调映象，因此，松弛(γ,r)-余强制映象是比 r-强单调映象更一般的映象.

设 $S:K_r\longrightarrow K_r$ 为非扩张映象，$\mathrm{F}(S)$ 表示 S 的不动点集，以 $\mathrm{VI}(T,K_r)$ 表示非凸变分不等式(1)的解集，$\mathrm{WHE}(T,S)$ 表示 Wiener-Hopf 方程(2)的解集，并且假设 $\mathrm{F}(S)\cap\mathrm{WHE}(T,S)\neq\varnothing$.

记 $\mathrm{F}(u)=P_{K_r}[u-\rho Tu]$，由引理 2 可知 $\mathrm{F}(u)$ 的不动点即非凸变分不等式(1)的解. 据此分析问题(1)和方程(2)的等价性，以及算法(3)的收敛性.

定理 1　$u^*\in\mathrm{F}(S)\cap\mathrm{VI}(T,K_r)$ 的充分必要条件是 $z^*\in\mathrm{WHE}(T,S)$，并满足

$$u^*=SP_{K_r}z^*\qquad z^*=u^*-\rho Tu^*$$

证　设 $u^*\in\mathrm{F}(S)\cap\mathrm{VI}(T,K_r)$，由引理 2 得

$$u^*=Su^*=P_{K_r}[u^*-\rho Tu^*]=SP_{K_r}[u^*-\rho Tu^*]\tag{4}$$

并且(4)式可以另记为

$$u^*=SP_{K_r}z^*\qquad z^*=u^*-\rho Tu^*$$

所以

$$z^*=u^*-\rho Tu^*=SP_{K_r}z^*-\rho TSP_{K_r}z^*\tag{5}$$

满足(5)式的 z^* 恰好是 Wiener-Hopf 方程(2)的解.

定理 2　设 K_r 为 H 中的一致近似正规子集，P_{K_r} 是 δ-Lipschitz 连续算子，其中 $\delta=\frac{r}{r-r'}$，$\forall r'\in(0,$

r). 设 $T: K_r \longrightarrow K_r$ 为松弛(γ, r)-余强制映象，且 T 为 μ-Lipschitz 连续的. 如果 $\alpha_n \in (0, 1)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$，且常数 $\rho > 0$ 满足

$$\left| \rho - \frac{r-\gamma\mu^2}{\mu^2} \right| < \frac{\sqrt{\delta^2(r-\gamma\mu^2)^2 - \mu^2(\delta^2-1)}}{\delta\mu^2} \qquad \frac{\sqrt{\delta^2-1}}{\delta}\mu < r - \gamma\mu^2 \tag{6}$$

则由算法(3) 得到的序列$\{z_n\}$收敛到 $z^* \in \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{WHE}(T, S)$.

证 设 $u^* \in \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{WHE}(T, S)$，由算法(3) 和定理 1 得

$$\begin{aligned} \| z_{n+1} - z^* \| &= \| (1-\alpha_n)(z_n - z^*) + \alpha_n(u_n - \rho T u_n - z^*) \| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\| z_n - z^* \| + \alpha_n \| u_n - u^* - \rho(Tu_n - Tu^*) \| \end{aligned} \tag{7}$$

由于 T 为(γ, r)-松弛强制映象且是 μ-Lipschitz 连续的，因此

$$\begin{aligned} &\| u_n - u^* - \rho(Tu_n - Tu^*) \|^2 = \\ &\| u_n - u^* \|^2 - 2\rho\langle Tu_n - Tu^*, u_n - u^* \rangle + \rho^2 \| Tu_n - Tu^* \|^2 \leqslant \\ &\| u_n - u^* \|^2 - 2\rho(-\gamma \| Tu_n - Tu^* \|^2 + r \| u_n - u^* \|^2) + \rho^2 \| Tu_n - Tu^* \|^2 = \\ &(1-2\rho r)\| u_n - u^* \|^2 + (2\rho\gamma + \rho^2)\| Tu_n - Tu^* \|^2 \leqslant \\ &(1 - 2\rho r + 2\rho\gamma\mu^2 + \rho^2\mu^2)\| u_n - u^* \|^2 \end{aligned} \tag{8}$$

由(7) 式和(8) 式，以及 S 的非扩张性得

$$\begin{aligned} &\| z_{n+1} - z^* \| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\| z_n - z^* \| + \alpha_n\sqrt{1-2\rho r + 2\rho\gamma\mu^2 + \rho^2\mu^2}\,\| u - u^* \| = \\ &(1-\alpha_n)\| z_n - z^* \| + \alpha_n\sqrt{1-2\rho r + 2\rho\gamma\mu^2 + \rho^2\mu^2}\,\| SP_{K_r}z_n - SP_{K_r}z^* \| \leqslant \\ &(1-\alpha_n)\| z_n - z^* \| + \alpha_n\sqrt{1-2\rho r + 2\rho\gamma\mu^2 + \rho^2\mu^2}\,\delta\| z_n - z^* \| = \\ &(1-\alpha_n)\| z_n - z^* \| + \alpha_n\theta\| z_n - z^* \| \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\theta = \delta\sqrt{1-2\rho r + 2\rho\gamma\mu^2 + \rho^2\mu^2}$. 由(6) 式不难验证 $\theta \in (0, 1)$，进一步整理(9) 式得

$$\begin{aligned} \| z_{n+1} - z^* \| &\leqslant [1-(1-\theta)\alpha_n]\| z_n - z^* \| \leqslant \\ &\prod_{i=0}^{n}[1-(1-\theta)\alpha_i]\| z_0 - z^* \| \end{aligned} \tag{10}$$

因为 $\alpha_n \in (0, 1)$，$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$，且 $\theta \in (0, 1)$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}[1-(1-\theta)\alpha_i] = 0$. 由(10) 式得

$$\lim_{n\to\infty}\| z_n - z^* \| = 0$$

即序列$\{z_n\}$收敛到 $z^* \in \mathrm{F}(S) \cap \mathrm{WHE}(T, S)$.

参考文献：

[1] 田有先，陈六新. 有限一致拟-李卜希兹映象族公共不动点的逼近 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(4)：25－29.

[2] VERMA R U. Generalized System for Relaxed Cocoercive Variational Inequalities and Projection Methods [J]. J Optim Theory Appl，2004，121(1)：203－210.

[3] 闻道君，邓　磊. 一般变分不等式的三步迭代算法 [J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2009，32(4)：436－438.

[4] NOOR M A. Iterative Schemes for Nonconvex Variational Inequalities [J]. J Optim Theory Appl，2004，121：385－395.

[5] PANG Li-ping，SHEN Jie，SONG He-shan. A Modified Predictor-Corrector Algorithm for Solving Nonconvex Generalized Variational Inequalities [J]. Comput Math Appl，2007，54：319－325.

[6] 闻道君，邓　磊. 渐近非扩张映射的粘滞逼近方法 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(3)：32－36.

[7] CLARKE F H，LEDYAEV Y S，WOLENSKI P R. Nonsmooth Analysis and Control Theory [M]. Berlin：Springer，

1998.

[8] POLIQUIN R A，ROCKAFELLAR R T，THIBAULT L. Local Differentiability of Distance Functions [J]. Trans Am Math Soc，2000，352：5231－5249.

[9] NOOR M A. Projection Methods for Nonconvex Variational Inequalities [J]. Optim Lett，2009(3)：411－418.

[10] NOOR M A. Some Iterative Methods for Nonconvex Variational Inequalities [J]. Comput Math Model，2010，21(1)：97－108.

[11] WEN Dao-jun. Projection Methods for a Generalized System of Nonconvex Variational Inequalities with Different Nonlinear Operators [J]. Nonl Anal，2010，73：2292－2297.

Approximate Methods of Wiener-Hopf Equations and Nonconvex Variational Inequalities

GONG Qian-fen[1]，　WEN Dao-jun[2]

1. *College of Computer Science and Information Engineering，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China*；

2. *College of Mathematics and Statistics，Chongqing Technology and Business University，Chongqing 400067，China*

Abstract：In this paper，a new class of nonlinear Wiener-Hopf equations with nonexpansive mappings is introduced. The equivalence between Wiener-Hopf equation and nonconvex variational inequality is established to analyze an iterative scheme for finding a common element of the set of fixed points of nonexpansive mappings and the set of solutions of the Wiener-Hopf equations. The convergence analysis of the approximation methods is also cosidered under some suitable conditions.

Key words：nonconvex variational inequality；Wiener-Hopf equation；proximal normal cone；relaxed (γ，r)-cocoercive；fixed point

责任编辑　廖　坤