文章编号:1000-5471(2012)02-0026-03

算子 I_n 在解析函数上的应用①

童东付

淮阴师范学院 数学与科学学院,江苏 淮安 223300

摘要: 定义了算子 I_n:

$$I_n f = f_n^{(-1)} * f = \left[\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\right]^{(-1)} * f$$

利用算子 I_n 刻画了 4 个函数类的新子类,证明了:$S_n^*(\gamma) \subset S_{n+1}^*(\gamma)$,$C_n(\gamma) \subset C_{n+1}(\gamma)$,$K_n(\beta, \gamma) \subset K_{n+1}(\beta, \gamma)$,$K_n^*(\beta, \gamma) \subset K_{n+1}^*(\beta, \gamma)$.

关 键 词: 解析函数;星形函数;凸函数;Noor 算子;近于凸函数;拟凸函数

中图分类号: O174 **文献标志码:** A

文中总假定 $E = \{z: |z| < 1\}$,$\alpha > 1$,$0 \leqslant \beta < 1$,以及 $0 \leqslant \gamma < 1$,A 表示在 E 内解析且具有形式 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ 的全体函数组成的类,**N** 表示自然数集.

文献[1] 给出了 γ 阶星形函数 $S^*(\gamma)$、γ 阶凸函数 $C(\gamma)$、γ 型 β 阶近于凸函数 $K(\beta, \gamma)$、γ 型 β 阶拟凸函数 $K^*(\beta, \gamma)$ 这 4 种解析函数的定义. 文献[2] 介绍并研究了由 Ruscheweyh 定义的导数运算函数类,定义了一种积分算子:$I_n: A \longrightarrow A$,设 $f_n(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{n+1}}$ $(n \in \mathbf{N})$,将 $f_n^{(-1)}$ 定义为

$$f_n(z) * f_n^{(-1)}(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \tag{1}$$

有

$$I_n f = f_n^{(-1)} * f = \left[\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\right]^{(-1)} * f \tag{2}$$

由(2) 式可得 $I_0 f = zf'$,$I_1 f = f$,由(2) 式所定义的积分算子 I_n 称为 f 的 n 阶 Noor 算子.

利用算子 I_n,可得如下 4 个函数类:

$$S_n^*(\gamma) = \{f \in A: I_n f \in S^*(\gamma)\} \qquad C_n(\gamma) = \{f \in A: I_n f \in C(\gamma)\}$$

$$K_n(\beta, \gamma) = \{f \in A: I_n f \in K(\beta, \gamma)\} \qquad K_n^*(\beta, \gamma) = \{f \in A: I_n f \in K^*(\beta, \gamma)\}$$

引用文献[3] 的结论,我们将给出下面几个结论:

定理 1 $S_n^*(\gamma) \subset S_{n+1}^*(\gamma)$,其中 $n \in \mathbf{N}$.

证 设 $f(z) \in S_n^*(\gamma)$,并令 $\dfrac{z(I_{n+1} f(z))'}{I_{n+1} f(z)} - \gamma = (1-\gamma) h(z)$,其中 $h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$,由等式(1) 知 $z(I_{n+1} f)' = (n+1) I_n f - n I_{n+1} f$,从而有

$$\frac{I_n f(z)}{I_{n+1} f(z)} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{z(I_{n+1} f(z))'}{I_{n+1} f(z)} + n\right) = \frac{1}{n+1}((1-\gamma) h(z) + \gamma + n) \tag{3}$$

---

① 收稿日期:2010-06-13
作者简介:童东付(1977-),男,江苏兴化人,讲师,主要从事复分析的研究.

对(3)式求导可得

$$\frac{z(I_nf(z))'}{I_nf(z)}=\frac{z(I_{n+1}f(z))'}{I_{n+1}f(z)}+\frac{(1-\gamma)zh'(z)}{(1-\gamma)h(z)+\gamma+n}=$$

$$\gamma+(1-\gamma)h(z)+\frac{(1-\gamma)zh'(z)}{(1-\gamma)h(z)+\gamma+n}$$

即有

$$\frac{z(I_nf(z))'}{I_nf(z)}-\gamma=(1-\gamma)h(z)+\frac{(1-\gamma)zh'(z)}{(1-\gamma)h(z)+\gamma+n} \tag{4}$$

令文献[3]定理 13 中的 $\psi(u,v)$ 等于(4)式的左边，其中 $u=h(z)$，$v=zh'(z)$，则由(4)式可得

$$\psi(u,v)=(1-\lambda)u+\frac{(1-\gamma)v}{(1-\gamma)u+\gamma+n} \tag{5}$$

易知 $\psi(u,v)$ 满足文献[3]中定理 13 的条件，由(5)式可得

$$\operatorname{Re}\psi(\mathrm{i}u_2,v_1)=\operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\gamma)v_1}{(1-\gamma)\mathrm{i}u_2+\gamma+n}\right\}=\frac{(1-\gamma)(n+\gamma)v_1}{(\gamma+n)^2+(1-\gamma)^2u_2^2}\leqslant$$

$$-\frac{(1-\gamma)(n+\gamma)(1+u_2^2)}{2[(\gamma+n)^2+(1-\gamma)^2u_2^2]}<0$$

其中 $v_1\leqslant-\dfrac{(1+u_2)^2}{2}$ 且 $(\mathrm{i}u_2,v_1)\in D$，$D=\left(\mathbf{C}-\left\{\begin{matrix}r+n\\r-n\end{matrix}\right\}\right)\times\mathbf{C}$，则复值函数 $\psi(u,v)$ 满足文献[3]中定理 13 的条件，故由文献[3]中定理 13 知，若 $\operatorname{Re}\psi(h(z),zh'(z))>0\ (z\in E)$，则 $\operatorname{Re}h(z)>0\ (z\in E)$，即若 $f(z)\in S_n^*(\gamma)$，则 $f(z)\in S_{n+1}^*(\gamma)$，从而定理得证.

定理 2　$C_n(\gamma)\subset C_{n+1}(\gamma)$，其中 $n\in\mathbf{N}$.

证　由 $f\in C_n(\gamma)$ 得 $I_nf\in C(\gamma)$，$z(I_nf)'\in S^*(\gamma)$，则 $I_n(zf')\in S^*(\gamma)$，$zf'\in S_n{}^*(\gamma)$，则 $zf'\in S_{n+1}{}^*(\gamma)$，$I_{n+1}(zf')\in S^*(\gamma)$，$z(I_{n+1}f)'\in S^*(\gamma)$，则 $I_{n+1}f\in C(\gamma)$，即 $f\in C_{n+1}(\gamma)$.

定理 3　$K_n(\beta,\gamma)\subset K_{n+1}(\beta,\gamma)$，其中 $n\in\mathbf{N}$.

证　设 $f(z)\in K_n(\beta,\gamma)$，则存在一个函数 $k(z)\in S^*(\gamma)$，使得 $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{z(I_nf(z))'}{k(z)}\right\}>\beta\ (z\in E)$，令函数 $g(z)$ 满足 $I_ng(z)=k(z)$，则 $g(z)\in S_n^*(\gamma)$ 且 $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{z(I_nf(z))'}{I_ng(z)}\right\}>\beta\ (z\in E)$，设

$$\frac{z(I_{n+1}f(z))'}{I_{n+1}g(z)}-\beta=(1-\beta)h(z)\qquad h(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$$

由恒等式 $z(I_{n+1}f)'=(n+1)I_nf-nI_{n+1}f$ 可得

$$\frac{z(I_nf(z))'}{I_ng(z)}=\frac{I_n(zf'(z))}{I_ng(z)}=\frac{z(I_{n+1}(zf'(z)))'+nI_{n+1}(zf'(z))}{z(I_{n+1}g(z))'+nI_{n+1}g(z)}=$$

$$\frac{\dfrac{z(I_{n+1}(zf'(z)))'}{I_{n+1}g(z)}+\dfrac{nI_{n+1}(zf'(z))}{I_{n+1}g(z)}}{\dfrac{z(I_{n+1}g(z))'}{I_{n+1}g(z)}+n}$$

由 $g\in S_n^*(\gamma)\subset S_{n+1}^*(\gamma)$，可设 $\dfrac{z(I_{n+1}g(z))'}{I_{n+1}g(z)}=(1-\gamma)H(z)+\gamma$，其中 $\operatorname{Re}H(z)>0\ (z\in E)$，从而

$$\frac{z(I_nf(z))'}{I_ng(z)}=\frac{\dfrac{z(I_{n+1}(zf'(z)))'}{I_{n+1}g(z)}+n[(1-\beta)h(z)+\beta]}{(1-\gamma)H(z)+\gamma+n} \tag{6}$$

考虑

$$z(I_{n+1}f(z))'=I_{n+1}g(z)[(1-\beta)h(z)+\beta] \tag{7}$$

对(7)式两边求导可得

$$\frac{z(I_{n+1}(zf'(z)))'}{I_{n+1}g(z)}=(1-\beta)zh'(z)+[(1-\beta)h(z)+\beta]\cdot[(1-\gamma)H(z)+\gamma] \tag{8}$$

由(6)式和(8)式可得

$$\frac{z(I_n f(z))'}{I_n g(z)}-\beta=(1-\beta)h(z)+\frac{(1-\beta)zh'(z)}{(1-\gamma)H(z)+\gamma+n} \tag{9}$$

(9) 式中令 $u=h(z)$，$v=zh'(z)$，并设 $\psi(u, v)$ 等于(9) 式的右边，有

$$\psi(u, v)=(1-\beta)u+\frac{(1-\beta)v}{(1-\gamma)H(z)+\gamma+n} \tag{10}$$

易知 $\psi(u, v)$ 满足文献[3] 中定理 13 的条件，其中 $D=\mathbf{C}\times\mathbf{C}$，由(10) 式可得

$$\operatorname{Re}\psi(\mathrm{i}u_2, v_1)=\frac{(1-\beta)v_1[(1-\gamma)h_1(x, y)+\gamma+n]}{[(1-\gamma)h_1(x, y)+\gamma+n]^2+[(1-\gamma)h_2(x, y)]^2}$$

其中 $H(z)=h_1(x, y)+\mathrm{i}h_2(x, y)$，$h_1(x, y)$ 和 $h_2(x, y)$ 是关于 x, y 的函数且 $\operatorname{Re}H(z)=h_1(x, y)>0$，令 $v_1\leqslant-\frac{1}{2(1+u_2{}^2)}$，则有

$$\operatorname{Re}\psi(\mathrm{i}u_2, v_1)\leqslant-\frac{(1-\beta)(1+u_2{}^2)[(1-\gamma)h_1(x, y)+\gamma+n]}{2\{[(1-\gamma)h_1(x, y)+\gamma+n]^2+[(1-\gamma)h_2(x, y)]^2\}}<0$$

从而有 $\operatorname{Re}h(z)>0$ $(z\in E)$，$f(z)\in K_{n+1}(\beta, \gamma)$，故定理 3 得证.

定理 4　$K_n^*(\beta, \gamma)\subset K_{n+1}^*(\beta, \gamma)$，其中 $n\in\mathbf{N}$.

证　令 $f\in K_n^*(\beta, \gamma)$，则 $I_n f\in K^*(\beta, \gamma)$，$z(I_n f)'\in K(\beta, \gamma)$，则 $I_n(zf')\in K(\beta, \gamma)$，$zf'\in K_n(\beta, \gamma)$，易知 $zf'\in K_{n+1}(\beta, \gamma)$，$I_{n+1}(zf')\in K(\beta, \gamma)$，$z(I_{n+1}f)'\in K(\beta, \gamma)$，则 $I_{n+1}f\in K^*(\beta, \gamma)$，即 $f\in K_{n+1}^*(\beta, \gamma)$.

参考文献：

[1] LIU Jin-lin. Some Applications of Certain Integral Operator [J]. Kyungpook Math J，2003，43(2)：211－219.

[2] NOOR K I. On Some Applications of the Ruscheweyh Derivatives [J]. Math Japonica，1991，36：869－874.

[3] MILLER S S，MOCANU P T. Second Order Differential Inequalities in the Complex Plane [J]. J Math Anal Appl，1978，65：289－305.

Some Applications of the I_n Operator in Analytic Functions

TONG Dong-fu

School of Mathematical Science，Huaiyin Normal University，Huai'an Jiangsu 223300，China

Abstract：In this paper，operator I_n is defined as

$$I_n f=f_n^{(-1)}*f=\left[\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\right]^{(-1)}*f$$

Then taking advantage of operator I_n，the new subclasses of the above-mentioned 4 classes are characterized. The following relations of these subclasses are proved：$S_n^*(\gamma)\subset S_{n+1}^*(\gamma)$，$C_n(\gamma)\subset C_{n+1}(\gamma)$，$K_n(\beta, \gamma)\subset K_{n+1}(\beta, \gamma)$，and $K_n^*(\beta, \gamma)\subset K_{n+1}^*(\beta, \gamma)$.

Key words：analytic function；starlike function；convex function；Noor operator；close-to-convex function；quasi-convex function

责任编辑　廖　坤