

Sierpiński Gasket 图的 2-距离着色^①莫明忠^{1,2}, 潘玉美²

1. 柳州师范高等专科学校 数学与计算机科学系, 广西 柳州 545004; 2. 重庆大学 数学与统计学院, 重庆 401331

摘要: 运用群论中置换的思想, 通过置换顶点的着色法, 研究 Sierpiński gasket 图 S_n 的 2-距离着色, 且给出了 Sierpiński gasket 图 S_n 的 2-距离色数的精确值为 $\chi_{2,d}(S_n) = 6$, 其中 $n \geq 2$.

关键词: Sierpiński gasket 图; 2-距离着色; 2-距离色数

中图分类号: O157.6

文献标志码: A

Sierpiński gasket 或 Sierpiński 分形的结构已被众多动力系统领域的专家和学者所熟知^[1]. Sierpiński gasket 图 S_n 是通过收缩 Sierpiński 图 $S(n, 3)$ 的不在三角形上的每条边而得到的图形^[2]. Sierpiński gasket 图不仅在工程方面有很重要的地位, 而且在心理学上也有应用^[3]. 文献[1]研究了 Sierpiński gasket 图所具备的几个良好的性质以及控制数. 文献[4]给出了 Sierpiński gasket 图的色数与边色数的精确值. 近年来, 关于 Sierpiński gasket 图的着色以及相关性质的研究又有了一些新的有趣的结果^[2,5-6].

图 G 的 2-距离着色是 G 的一个正常的顶点着色, 并且使得 G 中距离不大于 2 的任意两个顶点着不同的颜色. 图 G 的 2-距离色数是 G 的所有 2-距离着色中使用色数的最小者, 记为 $\chi_{2,d}(G)$. 文献[7]在研究星着色(正常的顶点着色, 并且使得长为 3 的路不着双色)时, 提到 2-距离着色的概念; 文献[8]研究了特殊类图的 2-距离着色, 如圈、树、积图等; 文献[9]给出了高度无限图的 2-距离着色的结果; 文献[10]给出了图的强直积的 2-距离着色的结果; 文献[11]给出了最大度为 Δ 的一般图的 2-距离色数的界为

$$\frac{5}{16}\Delta^2 + \frac{3}{8}\Delta + \frac{5}{16} \leq \chi_{2,d}(G) \leq \min\{\Delta^2 + 1, n\}$$

定义 1^[2,5] Sierpiński 图 $S(n, 3)$ 的顶点集 $V(S(n, 3))$ 是由数码 1, 2, 3 组成的所有的 n -元数组, 即 $V(S(n, 3)) = \{1, 2, 3\}^n$. $S(n, 3)$ 的顶点记作 $(u_1 \cdots u_n)$, 两个不同的顶点 $u = (u_1 \cdots u_n)$ 与 $v = (v_1 \cdots v_n)$ ($u_i, v_i \in \{1, 2, 3\}$) 相邻当且仅当存在 $h \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使得:

(i) $u_t = v_t$ ($t = 1, 2, \dots, h-1$);

(ii) $u_h \neq v_h$;

(iii) $u_t = v_h$ 和 $u_h = v_t$ ($t = h+1, h+2, \dots, n$).

Sierpiński gasket 图 S_n 是收缩了图 $S(n, 3)$ 的不在三角形上的所有边而得到的图形. 运用文献[2]的方法标记图 S_n 的顶点, 以 $S(n, 3)$ 的两个顶点 $(u_1 \cdots u_r, ij \cdots j)$ 与 $(u_1 \cdots u_r, ji \cdots i)$ 为边收缩到图 S_n 的顶点记为: $(u_1 \cdots u_r)\{i, j\}$ ($r \leq n-2$). S_n 有 3 个特殊的顶点 $(1 \cdots 1)$, $(2 \cdots 2)$ 和 $(3 \cdots 3)$, 称为 S_n 的极点. 图 S_n^i 是由顶点集 $\{(i \cdots i), \{i, j\}, \{k, i\}, (iu_1 \cdots u_r)\{i, j\}, (iu_1 \cdots u_r)\{j, k\}, (iu_1 \cdots u_r)\{k, i\}\}$ 导出的子图, 其中 $u_r, i,$

① 收稿日期: 2010-11-23

基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目(CDJZR10170010); 广西教育厅面上资助项目(200807MS098).

作者简介: 莫明忠(1974-), 男, 广西融安人, 讲师, 主要从事图论及其应用的研究.

$j, k \in \{1, 2, 3\}, r \in \{0, 1, \dots, n-3\}$. 因此 S_n^i 同构于 S_{n-1} .

本文主要研究 Sierpiński gasket 图 S_n 的 2-距离着色, 文中未介绍的术语与记号请参见文献[12].

定理 1 对于任意的 $n \geq 2$, Sierpiński gasket 图的 2-距离色数为 $\chi_{2d}(S_n) = 6$.

证 当 $n=2$ 时, 考虑 Sierpiński gasket 图 S_2 . 由于 S_2 的直径不大于 2, 所以由 2-距离着色的定义可得, $\chi_{2d}(S_2) = |V(S_2)| = 6$. 图 1(a) 给出了 S_2 的着色 φ_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_2(11) &= 1 & \varphi_2(\{1, 2\}) &= 2 & \varphi_2(22) &= 3 \\ \varphi_2(\{2, 3\}) &= 4 & \varphi_2(33) &= 5 & \varphi_2(\{3, 1\}) &= 6 \end{aligned}$$

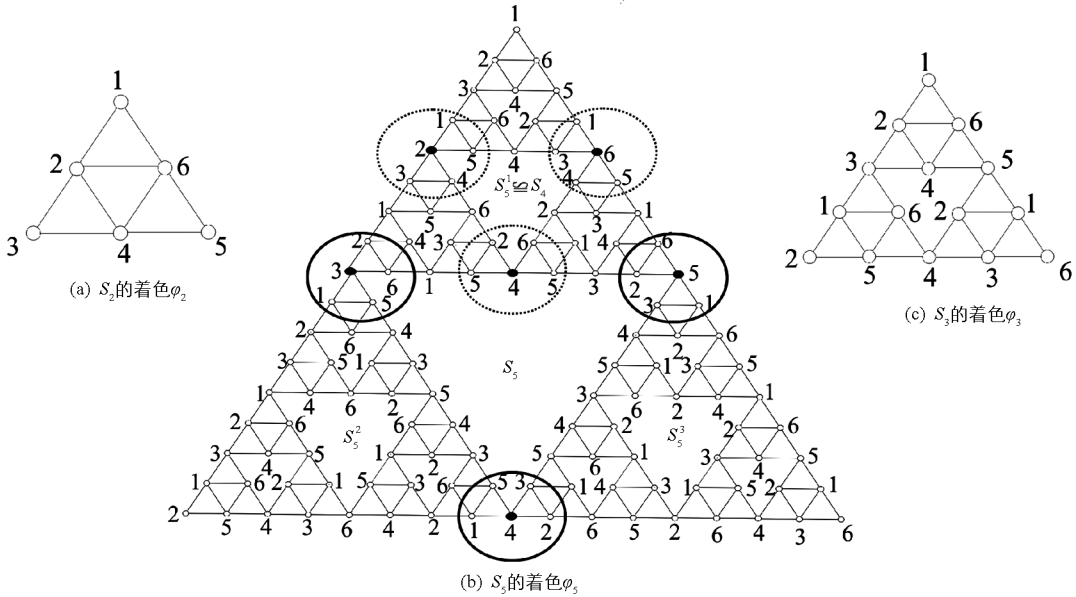


图 1 S_2, S_3, S_5 的 2-距离着色

当 $n \geq 3$ 时, 考虑图 S_n . 由于图 S_2 是图 S_n 的子图, 所以 $\chi_{2d}(S_n) \geq \chi_{2d}(S_2) = 6$. 下面只需要证明: 对任意的 $n \geq 3, \chi_{2d}(S_n) \leq 6$ 成立.

下面对 n 用递归的方法构造图 S_n 的着色 φ_n :

当 $n=3$ 时, 运用 6 种颜色构造图 S_3 的着色 φ_3 , 具体的着色规则如下:

$$\begin{aligned} \varphi_3(111) &= \varphi_3(2\{1, 2\}) = \varphi_3(3\{3, 1\}) = 1 & \varphi_3(222) &= \varphi_3(1\{1, 2\}) = \varphi_3(3\{1, 2\}) = 2 \\ \varphi_3(\{1, 2\}) &= \varphi_3(3\{2, 3\}) = 3 & \varphi_3(1\{2, 3\}) &= \varphi_3(\{2, 3\}) = 4 \\ \varphi_3(\{3, 1\}) &= \varphi_3(2\{2, 3\}) = 5 & \varphi_3(333) &= \varphi_3(1\{3, 1\}) = \varphi_3(2\{3, 1\}) = 6 \end{aligned}$$

设对任意的 $n-1 \geq 2$, 运用 6 种颜色构造 Sierpiński gasket 图 S_{n-1} 的着色为 φ_{n-1} . 设 $\varphi_n = \bigcup_{i=1}^3 \varphi_n^i$ 是图 S_n 的一个着色, φ_n^i 是图 S_n^i 的一个着色 ($i=1, 2, 3$). 当考虑 n 时, 运用 6 种颜色构造了 S_n 的着色 φ_n , 具体构造规则如下:

当 $n-1$ 为奇数时:

$$\varphi_n^1(u) = \dot{\varphi}_{n-1}(u) \quad (u \in V(S_n^1)), \text{ 这里 } \dot{\varphi}_{n-1} = \varphi_{n-1};$$

$\varphi_n^2(u) = \ddot{\varphi}_{n-1}(u) \quad (u \in V(S_n^2))$, 并且 $\ddot{\varphi}_{n-1}$ 是由 φ_{n-1} 通过顶点上所着颜色的置换 (123)(645) 而得到的 (对于 $u \in V(S_n^i), v \in V(S_{n-1})$, 如果 $\varphi_{n-1}(v) = 1$, 那么 $\varphi_n^2(u) = 2$; 如果 $\varphi_{n-1}(v) = 2$, 那么 $\varphi_n^2(u) = 3$; 如果 $\varphi_{n-1}(v) = 3$, 那么 $\varphi_n^2(u) = 1$; 如果 $\varphi_{n-1}(v) = 4$, 那么 $\varphi_n^2(u) = 5$; 如果 $\varphi_{n-1}(v) = 5$, 那么 $\varphi_n^2(u) = 6$; 如果 $\varphi_{n-1}(v) = 6$, 那么 $\varphi_n^2(u) = 4$), 由于图 S_n^i 同构于 Sierpiński gasket 图 S_{n-1} , 因此存在一一映射 $\theta: \theta(v) = u \quad (u \in V(S_n^i), v \in V(S_{n-1}))$;

$$\varphi_n^3(u) = \ddot{\ddot{\varphi}}_{n-1}(u) \quad (u \in V(S_n^3)), \ddot{\ddot{\varphi}}_{n-1} \text{ 是由 } \varphi_{n-1} \text{ 通过顶点上所着颜色的置换 (165)(243) \text{ 和交换颜色置换后}$$

顶点 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{2, 3\}$ 与 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{3, 1\}$ 上的颜色而得到的.

当 $n - 1$ 为偶数时:

$\varphi_n^1(u) = \dot{\varphi}_{n-1}(u)$ ($u \in V(S_n^1)$), 这里 $\dot{\varphi}_{n-1} = \varphi_{n-1}$;

$\varphi_n^2(u) = \ddot{\varphi}_{n-1}(u)$ ($u \in V(S_n^2)$), 并且 $\ddot{\varphi}_{n-1}$ 是由 φ_{n-1} 通过顶点上所着颜色的置换(132)(654)得到的;

$\varphi_n^3(u) = \ddot{\ddot{\varphi}}_{n-1}(u)$ ($u \in V(S_n^3)$), $\ddot{\ddot{\varphi}}_{n-1}$ 是由 φ_{n-1} 通过顶点上所着颜色的置换(156)(234)和交换颜色置换

后顶点 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{2, 3\}$ 与 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{3, 1\}$ 上的颜色而得到的.

由于 S_n^i 同构于 S_{n-1} , 易知 $\varphi_n = \bigcup_{i=1}^3 \varphi_n^i$ 是构造 S_n 的一个着色.

现在只需要证明 φ_n 是 Sierpiński gasket 图 S_n 的 2-距离着色.

下面对 n 用归纳法. 当 $n = 2, 3$ 时, 由 2-距离着色定义可知, φ_2 (或 φ_3) 是图 S_2 (或 S_3) 的 2-距离着色 (图 1(a)(c) 分别给出了 φ_2, φ_3).

假设 $n - 1$ 时定理 1 成立, 即 φ_{n-1} 是图 S_{n-1} 的 2-距离着色. 为了证明 φ_n 是图 S_n 的 2-距离着色, 令

$$G_{\{3, 1\}}^n = G[\overbrace{\{3, 1\}}^{n-3}, \overbrace{(1\ 3\cdots 3)}^{n-3}\{3, 1\}, \overbrace{(1\ 3\cdots 3)}^{n-3}\{2, 3\}, \overbrace{(3\ 1\cdots 1)}^{n-3}\{1, 2\}, \overbrace{(3\ 1\cdots 1)}^{n-3}\{3, 1\}]$$

$$G_{\{1, 2\}}^n = G[\overbrace{\{1, 2\}}^{n-3}, \overbrace{(2\ 1\cdots 1)}^{n-3}\{1, 2\}, \overbrace{(2\ 1\cdots 1)}^{n-3}\{3, 1\}, \overbrace{(1\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{2, 3\}, \overbrace{(1\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{1, 2\}]$$

$$G_{\{2, 3\}}^n = G[\overbrace{\{2, 3\}}^{n-3}, \overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{2, 3\}, \overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{1, 2\}, \overbrace{(2\ 3\cdots 3)}^{n-3}\{3, 1\}, \overbrace{(2\ 3\cdots 3)}^{n-3}\{2, 3\}]$$

为 Sierpiński gasket 图 S_n 的 3 类子图. 设 $\varphi_n(G_{\{i, j\}}^n)$ 是图形 $G_{\{i, j\}}^n$ 中顶点着色的集合 ($i = 1, j = 2; i = 2, j = 3; i = 3, j = 1$). 下面考虑 Sierpiński gasket 图 S_n 的着色 φ_n :

情形 1 当 n 为奇数时.

$\varphi_n^1 = \varphi_{n-1}$, φ_n^2 与 φ_n^3 分别是由着色 φ_n 通过颜色置换(132)(654)与(156)(234)和交换其中两个顶点的着色而得到的.

情形 1.1 当 $u, v \in V(S_n^i)$ 时 ($i = 1, 2, 3$ 且 $u \neq v$).

通过归纳假设, φ_n^i 是 S_n^i 的 2-距离着色 ($i = 1, 2, 3$), 即对于任意两个不同的顶点 $u, v \in V(S_n^i)$, 如果 $d(u, v) \leq 2$, 那么 $\varphi_n(u) \neq \varphi_n(v)$.

情形 1.2 当 $u \in V(S_n^i), v \in V(S_n^j)$ 时 ($i \neq j$).

若 $d(u, v) \leq 2$, 由图形 S_n 的构造可知 $u, v \in V(G_{\{i, j\}}^n)$ ($i = 1, j = 2; i = 2, j = 3; i = 3, j = 1$). 由于

交换了顶点 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{2, 3\}$ 与 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{1, 3\}$ 上所着的颜色, 又由着色 φ_n 的定义可得

$$\begin{aligned} \varphi_n(G_{\{1, 2\}}^n) &= \{3, 6, 2, 1, 5\} & \varphi_n(G_{\{2, 3\}}^n) &= \{4, 2, 3, 5, 1\} \\ \varphi_n(G_{\{3, 1\}}^n) &= \{5, 6, 2, 3, 1\} \end{aligned}$$

通过图 $G_{\{i, j\}}^n$ 的构造可知 $|V(G_{\{i, j\}}^n)| = 5$ ($i = 1, j = 2; i = 2, j = 3; i = 3, j = 1$), 因此 $\varphi_n(u) \neq \varphi_n(v)$.

情形 2 当 n 为偶数时.

$\varphi_n^1 = \varphi_{n-1}$, φ_n^2 与 φ_n^3 分别是由着色 φ_n 通过颜色置换(123)(645)与(165)(243)和交换其中两个顶点的着色而得到的.

情形 2.1 当 $u, v \in V(S_n^i)$ 时 ($i = 1, 2, 3$ 且 $u \neq v$).

与情形 1.1 的证明相同, 显然得证.

情形 2.2 当 $u \in V(S_n^i), v \in V(S_n^j)$ 时 ($i \neq j$).

若 $d(u, v) \leq 2$, 由图形 S_n 的构造可知 $u, v \in V(G_{\{i, j\}}^n)$ ($i = 1, j = 2; i = 2, j = 3; i = 3, j = 1$). 由

于交换了顶点 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{2, 3\}$ 与 $\overbrace{(3\ 2\cdots 2)}^{n-3}\{1, 3\}$ 上所着的颜色, 又由着色 φ_n 的定义可得

$$\varphi_n(G_{\{1, 2\}}^n) = \{2, 5, 1, 3, 4\} \quad \varphi_n(G_{\{2, 3\}}^n) = \{4, 5, 6, 2, 1\}$$

$$\varphi_n(G_{(3,1)}^n) = \{6, 1, 3, 4, 5\}$$

通过图 $G_{(i,j)}^n$ 的构造可知 $|V(G_{(i,j)}^n)| = 5$ ($i=1, j=2; i=2, j=3; i=3, j=1$), 因此 $\varphi_n(u) \neq \varphi_n(v)$.

综上所述 φ_n 是图 S_n 的 2-距离着色, 且 $\chi_{2d}(S_n) \leq 6$. 又由于对任意的 $n \geq 2$, $\chi_{2d}(S_n) \geq \chi_{2d}(S_2) = 6$, 则对任意的 $n \geq 2$, $\chi_{2d}(S_n) = 6$. 定理 1 得证.

参考文献:

- [1] TEGUIA A M. Sierpiński Gasket Graphs and Some of Their Properties [J]. Australas J Combin, 2006, 35: 181–192.
- [2] JAKOVAC M, KLAUZAR S. Vertex-, Edge-, and Total-Colorings of Sierpiński-Like Graphs [J]. Discrete Math, 2009, 309: 1548–1556.
- [3] KLIX F, RAUTENSTRAUCH-GOEDE K. Struktur and Komponenten Analyse von Problem Lösungsprozessen [J]. Z Psychol, 1967, 174: 167–193.
- [4] KLAUZAR S. Coloring Sierpiński Graphs and Sierpiński Gasket Graphs [J]. Taiwan J Math, 2008, 12: 513–522.
- [5] KLAUZAR S, MOHAR B. Crossing Numbers of Sierpiński-Like Graphs [J]. J Graph Theory, 2005, 50: 186–198.
- [6] 潘玉美, 莫明忠. Sierpiński Gasket 图的星着色 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2011, 36(3): 17–20.
- [7] FERTIN G, RASPAUD A, REED B. Star Coloring of Graphs [J]. Journal of Graph Theory, 2004, 47(3): 163–182.
- [8] 张忠辅, 刘林忠, 王建方, 等. 图的强染色 [J]. 西北师范大学学报: 自然科学版, 2002, 38(1): 574–583.
- [9] ALON N, MOHAR B. The Chromatic Number of Graph Powers [J]. Combinatorics Probability and Computing, 2002, 11: 1–10.
- [10] 马宝林, 陈祥恩, 刘娟. 图的强直积的 2-距离染色 [J]. 山东大学学报: 理学版, 2010, 45(3): 66–70.
- [11] 伏红勇, 谢德政. 图的 2-距离着色 [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 34(3): 17–20.
- [12] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory [M]. Berlin: Springer, 2008.

2 – Distance Coloring of Sierpiński Gasket Graphs

MO Ming-zhong^{1,2}, PAN Yu-mei²

1. Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou Guangxi 545004, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

Abstract: In this paper, the authors study 2-distance coloring of Sierpiński gasket Graphs S_n by applying vertex color permutation based on the idea of permutation in group theory. Meanwhile, the authors give the exact 2-distance chromatic number of Sierpiński gasket graphs S_n , $\chi_{2d}(S_n) = 6$, where $n \geq 2$.

Key words: Sierpiński gasket graph; 2-distance coloring; 2-distance chromatic number

责任编辑 廖坤