第 37 卷　第 2 期　西南师范大学学报（自然科学版）　2012 年 2 月
Vol. 37　No. 2　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb.　2012

文章编号:1000－5471(2012)02－0001－03

矩阵特征值的估计[①]

薛建明

昆明理工大学 津桥学院，建筑艺术及工学系，昆明 650106

摘要：讨论了矩阵特征值的估计，得到了特征值分布的几个区域，在此基础之上给出了矩阵张量积特征值的分布区域. 数值算例显示了所得结果的优越性.

关 键 词：特征值；圆盘；张量积

中图分类号：O151.2　　**文献标志码**：A

特征值估计是矩阵论中一个非常热门的研究领域，矩阵特征值问题越来越被相关领域的学者所关注(参见文献[1－5]). 文中用 $\boldsymbol{C}^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 阶复矩阵的集合，$\lambda(\boldsymbol{A})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的全体，令

$$R_i=\sqrt{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|^2}\qquad H_i=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\qquad i=1,2,\cdots,n$$

引理 1[2]　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都位于 n 个圆盘的并中，即

$$\lambda(\boldsymbol{A})\subset G(\boldsymbol{A})=\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in\mathbf{C}:|z-a_{ii}|\leqslant\sqrt{n-1}R_i\}$$

定理 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都位于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个卵形区域的并中，即

$$\lambda(\boldsymbol{A})\subset G(\boldsymbol{A})=\bigcup_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\{z\in\mathbf{C}:|z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant(n-1)R_iR_j\}$$

证　设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{C}^{n\times 1}$ 是相应的特征向量. 那么 $\boldsymbol{X}$ 的一个元素有最大绝对值，设为 x_s，则 $|x_s|\geqslant|x_i|$ $(i=1,2,\cdots,n)$，显然 $|x_s|\neq 0$. 如果 $\boldsymbol{X}$ 的其它所有分量都是零，那么 $\lambda=a_{ss}$，定理 1 成立. 现在假设 $\boldsymbol{X}$ 至少有两个非零元，设为 $x_s\neq 0$ 和 $x_t\neq 0$，它们的绝对值满足 $|x_s|\geqslant|x_t|\geqslant|x_i|$ $(s\neq t,\ i=1,2,\cdots,n)$. 由引理 1 有

$$|\lambda-a_{ss}|=\left|\frac{\sum\limits_{j\neq s}a_{sj}x_j\overline{x_s}}{|x_s|^2}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{j\neq s}|a_{sj}|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j\neq s}\left|\frac{x_j}{|x_s|}\right|^2\left|\frac{\overline{x_s}}{|x_s|}\right|^2}\leqslant$$
$$\sqrt{(n-1)\sum_{j\neq s}|a_{sj}|^2}\left|\frac{x_t}{x_s}\right|=\sqrt{n-1}R_s\left|\frac{x_t}{x_s}\right|\tag{1}$$

同时，我们有

$$|\lambda-a_{tt}|=\left|\frac{\sum\limits_{j\neq t}a_{tj}x_j\overline{x_t}}{|x_t|^2}\right|\leqslant\sqrt{\sum_{j\neq t}|a_{tj}|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j\neq t}\left|\frac{x_j}{|x_t|}\right|^2\left|\frac{\overline{x_t}}{|x_t|}\right|^2}\leqslant$$
$$\sqrt{(n-1)\sum_{j\neq t}|a_{tj}|^2}\left|\frac{x_s}{x_t}\right|=\sqrt{n-1}R_t\left|\frac{x_s}{x_t}\right|\tag{2}$$

由(1)式和(2)式有

$$|\lambda-a_{ss}||\lambda-a_{tt}|\leqslant\sqrt{n-1}R_s\left|\frac{x_t}{x_s}\right|\cdot\sqrt{n-1}R_t\left|\frac{x_s}{x_t}\right|=(n-1)R_sR_t$$

因此，$\lambda(\boldsymbol{A})$ 是 $G(\boldsymbol{A})$ 的子集.

---

① 收稿日期：2010－06－20

作者简介：薛建明(1982－)，女，山东聊城人，硕士，助教，主要从事矩阵理论和泛函分析的研究.

定理 2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\boldsymbol{C}^{n\times n}$，$\beta\in[0,1]$ 是给定的常数. 则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都位于 n 个圆盘的并中，即

$$\lambda(\boldsymbol{A})\subset G(\boldsymbol{A})=\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in\mathbf{C}:\ |z-a_{ii}|\leqslant(n-1)^{\frac{1-\beta}{2}}H_i^{\beta}R_i^{1-\beta}\}$$

证 当 $\beta=0$ 或 $\beta=1$ 时，由 Gerschgorin 定理和引理 1 知定理 2 成立，所以我们只考虑 $\beta\in(0,1)$ 的情况. 假设 $H_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|>0$，因为我们可以在 $H_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=0$ 的对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一行加上一个小的非零元 ε，使矩阵 $\boldsymbol{A}$ 产生扰动，所得到的包含区域大于 $\boldsymbol{A}$ 的包含区域，于是当 $\varepsilon\to0$ 时，可得定理 2 成立. 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{C}^{n\times1}$ 是相应的特征向量，且 $\boldsymbol{X}$ 有一个元素有最大的绝对值. 因为 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，所以 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=\lambda x_i$. 令 $|x_i|\geqslant|x_j|\ (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，得 $|x_i|>0$，于是

$$|\lambda-a_{ii}||x_i|=\Big|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j\Big|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|=\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|^{\beta}(|a_{ij}|^{1-\beta}|x_j|)$$

令 $s=\dfrac{1}{\beta}$，$t=\dfrac{1}{1-\beta}$，则 $\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{t}=1$，于是由 Hölder 不等式，我们有

$$|\lambda-a_{ii}||x_i|\leqslant\Big[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(|a_{ij}|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\Big]^{\beta}\Big[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(|a_{ij}|^{1-\beta}|x_j|)^{\frac{1}{1-\beta}}\Big]^{1-\beta}=H_i^{\beta}\Big[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(|a_{ij}|^{1-\beta}|x_j|)^{\frac{1}{1-\beta}}\Big]^{1-\beta}\tag{3}$$

因为 $H_i>0$，所以，由(3) 式有

$$\frac{|\lambda-a_{ii}||x_i|}{H_i^{\beta}}\leqslant\Big[\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(|a_{ij}|^{1-\beta}|x_j|)^{\frac{1}{1-\beta}}\Big]^{1-\beta}$$

所以

$$\left(\frac{|\lambda-a_{ii}|}{H_i^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}|x_i|^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\beta}}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式，得

$$\left(\frac{|\lambda-a_{ii}|}{H_i^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}|x_i|^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant\sqrt{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|^2}\sqrt{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|x_j|^{\frac{2}{1-\beta}}}$$

因为 $|x_i|\geqslant|x_j|\ (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\left(\frac{|\lambda-a_{ii}|}{H_i^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}|x_i|^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}||x_j|^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant\sqrt{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|^2}\cdot\sqrt{n-1}\,|x_i|^{\frac{1}{1-\beta}}$$

于是

$$\left(\frac{|\lambda-a_{ii}|}{H_i^{\beta}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\leqslant\sqrt{(n-1)\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|^2}=\sqrt{n-1}\,R_i\tag{4}$$

因而，对于某个 i，由(4) 式可得 $|\lambda-a_{ii}|\leqslant(n-1)^{\frac{1-\beta}{2}}H_i^{\beta}R_i^{1-\beta}$，即 λ 位于以 a_{ii} 为中心，$(n-1)^{\frac{1-\beta}{2}}H_i^{\beta}R_i^{1-\beta}$ 为半径的圆盘中. 因为不知道 i 与特征值的对应关系，所以 λ 位于所有这些圆盘的并中，即

$$\lambda(\boldsymbol{A})\subset G(\boldsymbol{A})=\bigcup_{i=1}^{n}\{z\in\mathbf{C}:\ |z-a_{ii}|\leqslant(n-1)^{\frac{1-\beta}{2}}H_i^{\beta}R_i^{1-\beta}\}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

定理 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都位于 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个卵形区域的并中，即

$$\lambda(\boldsymbol{A})\subset G(\boldsymbol{A})=\bigcup_{\substack{i,j=1\\i\neq j}}^{n}\{z\in\mathbf{C}:\ |z-a_{ii}||z-a_{jj}|\leqslant H_i(H_i+|a_{ii}-a_{jj}|)\}$$

证 设 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，则 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{C}^{n\times1}$ 是相应的特征向量，由 Gerschgorin 定理，存在 i，使 $|\lambda-a_{ii}|\leqslant\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|=H_i$，所以

$$|\lambda-a_{jj}|=|\lambda-a_{ii}+a_{ii}-a_{jj}|\leqslant|\lambda-a_{ii}|+|a_{ii}-a_{jj}|\leqslant H_i+|a_{ii}-a_{jj}|$$

于是我们可以得到

$$|\lambda-a_{ii}||\lambda-a_{jj}|\leqslant H_i(H_i+|a_{ii}-a_{jj}|)\qquad i\neq j$$

因此定理 3 得证.

推论 1　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times m}\in \boldsymbol{C}^{m\times m}$，则

$$\lambda(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})\subset G(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})=G(\boldsymbol{A})\cdot G(\boldsymbol{B})$$

其中 $\lambda(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的张量积的特征值全体所构成的集合

$$G(\boldsymbol{A})=\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\{z\in \mathbf{C}:\ |z-a_{ii}|\,|z-a_{jj}|\leqslant H_i(H_i+|a_{ii}-a_{jj}|)\}$$

表示包含 $\boldsymbol{A}$ 所有特征值的卵形区域

$$G(\boldsymbol{B})=\bigcup_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}\{z\in \mathbf{C}:\ |z-b_{ii}|\,|z-b_{jj}|\leqslant H'_i(H'_i+|b_{ii}-b_{jj}|)\}$$

表示包含 $\boldsymbol{B}$ 所有特征值的卵形区域，$G(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B})$ 表示由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的张量积的特征值全体元素的乘积所得到的区域.

我们还可以得到其它一些矩阵张量积特征值的包含区域.

例 1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 7 & 8 & 3\end{pmatrix}$$

由 Brauer 定理[1] 很容易求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于以下 3 个卵形的并集中：

$$\{z\in\mathbf{C}:\ |z-1|\,|z-2|\leqslant 50\}\cup\{z\in\mathbf{C}:\ |z-1|\,|z-3|\leqslant 75\}\cup\{z\in\mathbf{C}:\ |z-2|\,|z-3|\leqslant 150\}$$

由定理 3 我们可以得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值位于以下 3 个卵形的并集中：

$$\{z\in\mathbf{C}:\ |z-1|\,|z-2|\leqslant 30\}\cup\{z\in\mathbf{C}:\ |z-1|\,|z-3|\leqslant 35\}\cup\{z\in\mathbf{C}:\ |z-2|\,|z-3|\leqslant 110\}$$

可见定理 3 对例 1 得到的估计要比 Brauer 定理得到的精确. 事实上，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=12$，$\lambda_2=-3+\sqrt{3}$，$\lambda_3=-3-\sqrt{3}$，定理 3 所确定的区域的边界已经很靠近特征值 $\lambda_1=12$，可见定理 3 在某些情况下是具有其优越性的.

参考文献：

[1]　HORN R A，JOHNSON C R. Matrix Analysis [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1985.

[2]　WU Jun-liang. Distribution and Estimation for Eigenvalues of Real Quaternion Matrices [J]. Comput Math Appl，2008，55：1998－2004.

[3]　胡兴凯，邹黎敏. 矩阵特征值和奇异值的估计 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2009，34(3)：40－43.

[4]　陈经纬. 矩阵特征值的分布 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2007，29(11)：45－47.

[5]　胡兴凯，邹黎敏. 矩阵秩和特征值的估计 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(12)：99－102.

Estimation of the Eigenvalues of Matrices

XUE Jian-ming

Architecture and Engineering Faculty，Oxbridge College ，Kunming University of Science and Technology，Kunming 650106，China

Abstract：The purpose of this paper is to discuss the estimation of the eigenvalues of matrices. Firstly，several regions about the distribution of the eigenvalues of matrices are presented. After that，a distribution region for the eigenvalues of tensor product of matrices is presented. The effectiveness of our results is demonstrated by a numerical example.

Key words：eigenvalue；disk；tensor product

责任编辑　廖　坤