第 37 卷 第 1 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2012 年 1 月
Vol. 37 No. 1　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Jan. 2012

文章编号:1000-5471(2012)01-0016-04

离散型随机变量幂赋范最大值的极限分布①

帅玉亮，　彭作祥

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要: (X_n)为独立同分布离散型随机变量序列，$M_n=\max(X_1,\cdots,X_n)$. 当离散型随机变量分布的参数随 n 适当变化时，得到了$|M_n/\alpha_n|^{1/\beta_n}\operatorname{sign}(M_n)$的极限分布，并应用于 6 种常见离散型分布.

关 键 词: 最大值极限分布；幂赋范；离散型随机变量

中图分类号: O211.4　　**文献标志码:** A

设(X_n)为独立同分布随机变量序列(简记为 i.i.d. 序列)，其公共分布函数为 $F(x)$. $M_n=\max(X_1,\cdots,X_n)$. 对非退化分布函数 $G(x)$，若存在实数序列 $a_n>0$，$b_n\in\mathbb{R}$ 使得

$$P(M_n\leqslant a_n x+b_n)\xrightarrow{w}G(x)\tag{1}$$

则 $G(x)$ 只能与3种经典的极值分布类型之一同类，且如果(1)式成立，则称 $F(x)$ 属于吸引场 $D_l(G)$，记为 $F\in D_l(G)$[1]. 文献[2]推广了 $D_l(G)$ 中分布函数所满足充要条件的部分结果，文献[3]进一步研究了独立同有限混合分布的随机变量的极值分布问题. 对于一些常见的离散分布(1)式是不成立的，如离散均匀分布、二项分布、几何分布、负二项分布、广义幂级数分布和泊松分布等[1]. 文献[4]和[5]分别证明了当上述提及的常见离散分布的参数随 n 适当变化时，(1)式可以成立.

文献[6]研究了非线性赋范下的最大值的极限分布. 特别地，若存在 $\alpha_n>0$ 和 $\beta_n>0$，满足当 $n\to\infty$ 时，

$$P\left(\left|\frac{M_n}{\alpha_n}\right|^{\frac{1}{\beta_n}}\operatorname{sign}(M_n)\leqslant x\right)=F^n(\alpha_n\mid x\mid^{\beta_n}\operatorname{sign}(x))\xrightarrow{w}H(x)\tag{2}$$

其中 $\operatorname{sign}(x)$ 是符号函数，则称 F 属于 H 的幂赋范条件下的吸引场，且记作 $F\in D_p(H)$. 文献[6]证明了 H 一定是 6 种极值分布类型之一. 文献[7]和[8]分别得到了 F 满足(2)式的充要条件，其中文献[7]得到了 $D_l(G)\subset D_p(H)$. 文献[9]给出了 $D_p(H)$ 和 $D_l(G)$ 的联系.

本文采用使离散分布的参数随 n 适当变化的方法，得到了几种常见离散分布的幂赋范条件下的极值分布. 记 $\omega(F)=\sup\{x\mid F(x)<1\}$ 为 F 的右端点. 对于离散变量 X，分布律为 $p_k=P(X=k)$，其中 $k\leqslant\omega(F)$.

为了证明主要结论，需要以下引理.

引理 1　(X_n)为一列 i.i.d. 随机变量，其公共分布函数为 F，且 $\omega(F)>0$. 假设 $G(x)$ 是非退化分布函数，如果存在 a_n,b_n 满足当 $n\to\infty$ 时 $a_n/b_n\to0$ 且(1)式成立，那么，当 $n\to\infty$ 时，

$$P\left(\left|\frac{M_n}{\alpha_n}\right|^{\frac{1}{\beta_n}}\operatorname{sign}(M_n)\leqslant x\right)=F^n(\alpha_n\mid x\mid^{\beta_n}\operatorname{sign}(x))\to G(\mu(x))\tag{3}$$

① 收稿日期: 2010-12-12
基金项目: 重庆市首届高校人才基金资助项目(120060-20600204).
作者简介: 帅玉亮(1986-)，男，江西南昌人，硕士研究生，主要从事极值理论的研究.

其中：$\alpha_n = b_n$，$\beta_n = a_n / b_n$，$\mu(x) = \begin{cases} \log x & x > 0 \\ -\infty & x \leqslant 0 \end{cases}$.

证 定义

$$\mu_n(x) = \begin{cases} -1/\beta_n & x \leqslant 0 \\ (x^{\beta_n} - 1)/\beta_n & x > 0 \end{cases}$$

首先对于 $x \leqslant 0$，由于 $\omega(F) > 0$，因此当 $n \to \infty$ 时，

$$F^n(\alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x)) = P(M_n \leqslant \operatorname{sign}(x)\alpha_n \mid x \mid^{\beta_n}) \leqslant P(M_n \leqslant 0) \to 0 \tag{4}$$

当 $x > 0$ 时，由条件知 $\mu_n(x) \to \log x$. 因此，

$$F^n(\alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x)) = F^n(\alpha_n x^{\beta_n}) = F^n(a_n \mu_n(x) + b_n) \to G(\log x) \tag{5}$$

引理证毕.

下面讨论本文主要结论. 首先是关于泊松分布幂赋范条件下的最大值极限分布. (X_n) 为参数 $\lambda(n)$ 的泊松独立随机变量序列，其公共分布律为

$$p_k = \frac{\lambda^k(n)}{k!}\exp(-\lambda(n)) \qquad k = 0, 1, \cdots \tag{6}$$

且 $\lambda(n)$ 满足 $\log n = o(\lambda^{1/3}(n))$，取

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\log n}} \qquad b_n = \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n + \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}} \tag{7}$$

当 $n \to \infty$ 时，文献[4]得到

$$P(M_n \leqslant \sqrt{\lambda(n)}\, a_n x + \sqrt{\lambda(n)}\, b_n + \lambda(n)) \to \exp(-\exp(-x))$$

由引理 1，得到以下结论.

定理 1 假设 (X_n) 为所述泊松独立随机变量序列，取 $\alpha_n = \lambda(n) + \sqrt{\lambda(n)}\, b_n$，$\beta_n = a_n / (b_n + \sqrt{\lambda(n)})$，那么

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leqslant \alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x)) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \exp(-x^{-1}) & x > 0 \end{cases}$$

其中 a_n 和 b_n 定义见(7)式.

证 由于 $n \to \infty$ 时，$P(M_n \leqslant \alpha_n \beta_n x + \alpha_n) \to \exp(-\exp(-x))$，且 $n \to \infty$ 时，

$$\beta_n = \frac{2}{8\log n + 2\sqrt{2\lambda(n)\log n} - \log\log n - \log 4\pi} \to 0$$

应用引理 1，即可得到结论.

定理 2 假设 (X_n) 是一列 i. i. d. 的离散均匀随机变量序列，其分布律为 $p_k = \dfrac{1}{N}$，$k = 1, 2, \cdots, N$，$N = N(n)$. 如果 $N(n)$ 满足 $n = o(N(n))$，那么对于序列

$$\alpha_n = N(n) + \frac{N(n)}{n}\log\beta \qquad \beta_n = \frac{\alpha}{n + \log\beta}$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leqslant \alpha_n \mid x \mid^{\beta_n} \operatorname{sign}(x)) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ \beta x^{\alpha} & 0 < x \leqslant \beta^{-1/\alpha} \end{cases}$$

其中：$\alpha > 0$，$0 < \beta \leqslant 1$.

证 由文献[5]的定理 2 知 $n \to \infty$ 时有，

$$P(M_n \leqslant \alpha_n \beta_n x + \alpha_n) \to \exp(\alpha x - \beta)$$

显然 $n \to \infty$ 时 $\beta_n \to 0$，最后应用引理 1 即可得到结论.

对于二项分布，定义

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \qquad k = 0, 1, \cdots, N \tag{8}$$

以下定理表明,当 $N=N(n)\to\infty$ 且参数 p 固定时,可以得到二项分布幂赋范下的最大值极限分布.

定理 3 假设(X_n)是一列 i.i.d. 的随机变量,都服从二项分布,其参数 p 固定,$N(n)$ 满足

$$(\log n)^3=o(N(n)) \tag{9}$$

则存在序列

$$\alpha_n=p\,N(n)+\sqrt{p(1-p)N(n)}\,b(n) \qquad \beta_n=\frac{a_n}{\sqrt{p\,N(n)/(1-p)}+b_n}$$

使得

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant\alpha_n\mid x\mid^{\beta_n}\mathrm{sign}(x))=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \exp(-x^{-1}) & x>0\end{cases}$$

其中 a_n,b_n 与(7)式中定义相同.

证 首先由文献[5]中的定理 3 得到,当 $n\to\infty$ 时,

$$P(M_n\leqslant\alpha_n\beta_n x+\alpha_n)\to\exp(-\exp(-x))$$

再由(8)和 β_n 的定义,显然 $\beta_n\to 0$. 最后应用引理 1 即可得到结果.

对于几何分布,其分布律为

$$p_k=p(1-p)^{k-1} \qquad k=1,2,\cdots \tag{10}$$

定理 4 假设(X_n)是一列 i.i.d. 随机变量,都服从参数为 $p=p(n)$ 的几何分布,如果当 $n\to\infty$ 时 $p(n)\to 0$,取

$$\alpha_n=\frac{\log(n/\beta)}{p(n)} \qquad \beta_n=\frac{\alpha}{\log(n/\beta)}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant\alpha_n\mid x\mid^{\beta_n}\mathrm{sign}(x))=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \exp(-\beta x^{-\alpha}) & x>0\end{cases}$$

其中:$\alpha>0$, $\beta>0$.

证 首先由文献[5]中的定理 4 有,当 $n\to\infty$ 时,

$$P(M_n\leqslant\alpha_n\beta_n x+\alpha_n)\to\exp(-\beta\exp(-\alpha x))$$

所以由(10)式和 β_n 定义知 $\beta_n\to 0$. 最后通过引理 1 即可得到结论.

定义负二项分布为

$$p_k=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \qquad k=r,r+1,\cdots \tag{11}$$

得到以下结论.

定理 5 假设(X_n)是一列 i.i.d. 随机变量,都服从负二项分布,其参数满足 $r\geqslant 2$(r 为常数),$p(n)\to 0$ 且

$$p(n)=o(1/\log n) \tag{12}$$

取

$$\alpha_n=\frac{\log n+(r-1)\log\log n-\log(r-1)!}{p(n)} \qquad \beta_n=\frac{\alpha}{\log n+(r-1)\log\log n-\log(r-1)!}$$

则

$$\lim_{n\to\infty}P(M_n\leqslant\alpha_n\mid x\mid^{\beta_n}\mathrm{sign}(x))=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ \exp(-x^{-\alpha}) & x>0\end{cases}$$

其中 $\alpha>0$.

证 由(12)式和 β_n 的定义可得,当 $n\to\infty$ 时 $\beta_n\to 0$,又由文献[5]中的定理 4,当 $n\to\infty$ 时,

$$P(M_n\leqslant\alpha_n\beta_n x+\alpha_n)\to\exp(-\exp(-\alpha x))$$

因此,再由引理 1 便可得到结论.

参考文献：

[1] GALAMBOS J. The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics [M]. 2nd. Florida: Krieger, 1987: 51－96.

[2] CHEN Shou-quan. Two Notes on the Domain of Attraction of $D(\lambda)$ [J]. 西南大学学报：自然科学版，2000，25(2)：126－133.

[3] CHENG Qiong, PENG Zuo-xiang. Limiting Distributions of Maxima on Mixed Distributions [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(1)：5－10.

[4] ANDERSON C W, COLES S G, HÜSLER J. Maxima of Poisson-like Variables and Related Triangular Arrays [J]. Ann Appl Probab, 1997, 7(4): 953－971.

[5] NADARAJAH S, MITOV K. Extremal Limit Laws for Discrete Random Variables [J]. J Math Sci, 2004, 122(4): 3404－3415.

[6] PANTCHEVA E I. Limit Theorems for Extreme Order Statistics Under Nonlinear Normalization [J]. Lecture Notes in Mathematics, 1985, 1155: 284－309.

[7] MOHAN N R, RAVI S. Max Domains of Attraction of Univariate and Multivariate p-Max Stable Laws [J]. Theory of Probability and its Applications, 1992, 37(4): 632－643.

[8] SUBRAMANYA U R. On Max Domains of Attraction of Univariate p-Max Stable Laws [J]. Statistics and Probability Letters, 1994, 19(4): 271－279.

[9] CHRISTOPH G, FALK M. A Note on Domains of Attraction of p-Max Stable Laws [J]. Statistics and Probability Letters, 1996, 28(3): 279－284.

[10] NOACK A. A Class of Random Variables with Discrete Distributions [J]. Ann Math Statist, 1950, 21(1): 127－132.

Limiting Distributions of Maxima of Discrete Random Variables under Power Normalization

SHUAI Yu-liang,　PENG Zuo-xiang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let (X_n) be a sequence of independent and identically distributed discrete random variable, denoted by $M_n=\max(X_1, \cdots, X_n)$, the partial maximum. The limiting distributions of $|M_n/\alpha_n|^{1/\beta_n}\operatorname{sign}(M_n)$ are studied as the related parameters of discrete distributions varying as $n\to\infty$. Six families of discrete distributions are given to illustrate the results.

Key words: limiting distribution of maxima; power normalization; discrete random variable

责任编辑　张　枸