文章编号:1000-5471(2012)01-0007-04

带 Hardy 项的半线性椭圆方程解的研究①

郭　杰，　郭淑妹，　张　宁

中国人民解放军信息工程大学 理学院，郑州 450001

摘要：讨论了带 Hardy 项的半线性椭圆方程对称解的存在性问题，结合扰动项的假设条件，利用 Sturm 比较原理和打靶法得到了问题的球对称解.

关　键　词：球对称解；Sturm 比较原理；打靶法；隐函数定理

中图分类号：O175.2　　　**文献标志码：A**

近几年来，关于半线性椭圆方程解的球对称性及非对称性问题在大量的文献中都有论述，对于一般的有界区域得到了相当完善的存在性及唯一性结果. 至于环上的情形，文献[1] 中讨论了方程

$$\Delta u + f(u) = 0 \qquad R_1 < |x| < R_0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 3$$

在下列各种边界条件下的球对称解的存在性及唯一性：

1) $u = 0$，$|x| = R_1$ 且 $|x| = R_0$；

2) $u = 0$，$|x| = R_1$ 且 $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$，$|x| = R_0$；

3) $\dfrac{\partial u}{\partial r} = 0$，$|x| = R_1$ 且 $u = 0$，$|x| = R_0$.

其中：$r = |x|$，$\dfrac{\partial}{\partial r}$ 表示径向导数. 文献[2] 深入研究了该方程只在 Dirichlet 边界条件下的球对称解的性质，然后在此基础上利用分支理论得到了非球对称解的存在性. 文献[3] 进一步研究了带有参数 λ 的方程

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda f(u) = 0 & x \in \Omega \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中 $\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 3,\ R_1 < |x| < R_2\}$，证明了该方程存在球对称解，且解随着参数 λ 的变化表现出不同的性质，接着又分析了当已知函数 f 增长速度很快时解会出现分支现象.

本文研究带 Hardy 项的非线性椭圆方程：

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \dfrac{u}{|x|^2} = f(u),\ x \in \Omega \\ u = 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中：$\Omega = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n,\ n \geqslant 3,\ a < |x| < 1\}$ 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 3)$ 中的环，$0 \leqslant \mu < \bar{\mu} = (\dfrac{n-2}{2})^2$，$f(u)$ 为已知函数. 因为当 $\mu \neq 0$ 时方程出现了带奇异系数的项，也就是通常所说的 Hardy 项. 带 Hardy 项的半线性椭圆方程的求解有一定的困难，因此需要把问题转换. 这里首先采用适当的变量代换消除奇异项，得到了一个一般的二阶常微分方程，然后再借助于常微分方程理论和文献[4] 的常微分方程边值问题及 Sturm 比较

① 收稿日期：2010-12-23
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11071094).
作者简介：郭　杰(1979-)，女，河南周口人，讲师，主要从事偏微分方程的研究.

原理得到本文的主要结论如下:

定理 假设 f 满足条件

(A1) $f \in C^2(\mathbb{R}^1)$,当 $u \geqslant 0$ 时,$f(u) > 0$.

(A2) $\lim\limits_{u \to \infty} \dfrac{f(u)}{u} = \infty$.

则方程(1)存在两个球对称解.

为了证明定理,需要先做一些推导工作.

在球对称意义下,方程(1)化为

$$u''(r) + \frac{n-1}{r}u'(r) + \frac{\mu}{r^2}u(r) + f(u) = 0 \qquad r \in (a, 1)$$

做变量代换 $s = r^{2-n}$,$w(s) = u(r)$,上式变形为

$$w''(s) + \mu p(s)w(s) + \rho(s)f(w(s)) = 0 \qquad s \in (s_0, s_1) \tag{2}$$

其中

$$p(s) = ((n-2)s)^{-2} \qquad \rho(s) = ((n-2)s^{\frac{n-1}{n-2}})^{-2} \qquad s_0 = 1, s_1 = a^{2-n} \tag{3}$$

边界条件可化为

$$w(s_0) = w(s_1) = 0 \tag{4}$$

我们试图利用向后打靶法得到(2),(4)式的球对称解的存在性,为此讨论初值问题

$$u''(s) + \mu p(s)u(s) + \rho(s)f(u(s)) = 0 \qquad s < s_1 \tag{5}$$

$$u(s_1) = 0, u'(s_1) = -b \tag{6}$$

其中 $b > 0$ 是打靶参数,约定常数 $s_1 > 0$. 由常微分方程理论得,当 $s \in (0, s_1)$ 时,(5),(6)式存在唯一解,其解的最大存在区间记作 $(s(b), s_1)$. 易知(5),(6)式等价于积分方程

$$u(s) = b(s_1 - s) - \int_s^{s_1} (t-s)[\mu p(t)u(t) + \rho(t)f(u(t))]\mathrm{d}t \qquad s < s_1 \tag{7}$$

对某个 $\alpha \geqslant 0$,当 $s \in (\alpha, s_1)$ 时,若 $u > 0$,则由(7)式可知

$$u(s) \leqslant b(s_1 - s) \qquad s \in (\alpha, s_1) \tag{8}$$

可见,若 $s \in (0, s_1)$ 时,$u > 0$,则由(8)式可知

$$u(s, b) \leqslant bs_1$$

若 u 在 $(s(b), s_1)$ 中有一个零点,则记为 $s_0(b)$,即

$$s_0(b) = \inf\{s_0 : u(s, b) > 0, s \in (s_0, s_1)\}$$

而且 $s_0(b) > 0$.

由常微分方程理论知道,$u(s, b)$,$u'(s, b)$ 是集合 $\{(s, b) \mid b > 0, s \in (s(b), s_1)\}$ 上的连续可微函数. 由隐函数定理知,集合 $I = \{b > 0 : s_0(b) > 0\}$ 是开集. 若 $u > 0$,由条件(A1)及(5)式可知 $u(\cdot, b)$ 在区间 $(s_0(b), s_1)$ 上是上凸函数. 易知当 $s \in (0, s_1)$,$u > 0$ 时,有 $\lim\limits_{s \to 0^+} u(s, b) = 0$.

因此对任意 $b > 0$,存在唯一的 $\tau(b) \in (s_0(b), s_1)$ 使得

$$u(\tau(b), b) = \max_{(s_0(b), s_1)} u(\cdot, b)$$

由隐函数定理可知,$\tau(b)$ 是 b 的连续可微函数且有 $u'(s, b) > 0$,当 $s \in (s_0(b), \tau)$;$u'(s, b) < 0$,当 $s \in (\tau, s_1)$.

引理 1 假设 f 满足条件(A1),(A2),则

$$\lim_{b \to \infty} \tau(b) = s_1 \tag{9}$$

$$\lim_{b \to \infty} u(\tau(b), b) = \infty \tag{10}$$

证 假设(9)式不成立,则存在 $\tau_0 \in (0, s_1)$ 及序列 $\{b_k\}$,使得

$$\lim_{b_k \to \infty} \tau(b_k) = \tau_0 \qquad u_k(s) > 0 \qquad u'_k(s) \leqslant 0 \qquad s \in (\tau_0, s_1) \tag{11}$$

其中 $u_k(s) = u(s, b_k)$.

令 $\bar{s}=\dfrac{s_1+\tau_0}{2}$，则

$$\limsup_{k\to\infty} u_k(\bar{s})=\infty$$

否则，存在常数 $M>0$ 及 k_0 使

$$u_k(\bar{s})\leqslant M \qquad k\geqslant k_0 \tag{12}$$

由(7) 式和(12) 式可得，

$$u_k(\bar{s})=b_k(\frac{s_1-\tau_0}{2})-\int_{\bar{s}}^{s_1}(t-\bar{s})[\mu p(t)+\rho(t)f(u(t))]\mathrm{d}t\geqslant b_k(\frac{s_1-\tau_0}{2})-C$$

其中 C 为非负常数．显然由(11)，(12) 式知这是不可能的．

取子序列仍记作$\{b_k\}$，而且

$$\lim_{k\to\infty} u_k(\bar{s})=\infty \tag{13}$$

由式(3) 知，存在$(s'_0, s'_1)\subset(\tau_0, \bar{s})$ 使

$$p(s)\geqslant p_0>0 \qquad \rho(s)\geqslant\rho_0>0 \tag{14}$$

记 $M_k=\inf\left\{\dfrac{f(u_k(s))}{u_k(s)}, s\in(s'_0, s'_1)\right\}$，由 $u'_k(s)<0$，$s\in(\tau_0, s_1)$ 得

$$M_k\geqslant\inf\left\{\frac{f(u)}{u}: u\geqslant u_k(\bar{s})\right\}$$

由(13) 式和条件(A2) 得

$$\lim_{k\to\infty} M_k=\infty \tag{15}$$

再由(5) 式得，函数 u_k 满足

$$u''(s)+[\mu p(s)+\rho(s)h_k(s)]u(s)=0 \qquad s\in(s'_0, s'_1)$$

其中 $h_k(s)=\dfrac{f(u_k(s))}{u_k(s)}$．设 v_k 是方程

$$v''(s)+(\mu p_0+\rho_0 M_k)v(s)=0 \qquad s\in(s'_0, s'_1)$$

的解．由(14) 和(15) 式可知，当 k 足够大时，在(s'_0, s'_1) 中 v_k 至少有 2 个零点．由 Sturm 比较定理知，在(s'_0, s'_1) 中 u_k 至少有一个零点，与式(11) 矛盾．这就证明了式(9) 成立．

下面用反证法证明(10) 式成立．假设(10) 式不成立，则存在趋于无穷大的序列$\{b_k\}$ 和常数 M，使对任意 k 有

$$u_k(\tau_k)\leqslant M \tag{16}$$

其中 $\tau_k=\tau(b_k)$．记 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$，定义

$$V(s)=V(s, b)=\frac{1}{2}[u'(s)^2+\mu p(s)u(s)^2]+\rho(s)F(u(s))$$

由(2) 式知，

$$V'(s)=\frac{1}{2}\mu u(s)^2 p'(s)+\rho'(s)F(u(s))$$

所以

$$\frac{1}{2}b_k^2\leqslant\frac{1}{2}\mu p(\tau_k)u(\tau_k)^2+\rho(\tau_k)F(u(\tau_k))$$

由(16) 式知，上式右端有界，显然矛盾．故(10) 式得证．综上所述，引理得证．

由文献[5] 知，$\tau(b)\leqslant\dfrac{s_0(b)+s_1}{2}$，因此

$$\lim_{b\to\infty} s_0(b)=s_1$$

引理 2　假设 f 满足(A1)，(A2)，则对任意 $b>0$，$s_0(b)>0$ 有

$$\lim_{b\to 0^+} s_0(b)=\lim_{b\to 0^+}\tau(b)=s_1$$

证 只需证明$\lim\limits_{b\to 0^+} s_0(b)=s_1$成立. 假设该式不成立，则存在$\eta>0$及趋于0的序列$\{b_k\}$使得

$$s_1-2\eta\leqslant s'_k=s_0(b_k)\leqslant s_1-\eta$$

由(7),(8)式知，当k足够大时有

$$2\eta b_k\geqslant b_k(s_1-s'_k)\geqslant\frac{1}{2}\lambda f(0)\int_{s'_k}^{s_1}(t-s'_k)\rho(t)\mathrm{d}t\geqslant c(\eta)>0$$

显然这是矛盾的. 引理得证.

定理1的证明 记$s_0^*=\min\{s_0(b):b>0\}<s_0$. 由前式及引理1、引理2可知，至少存在两个参数$b_1>0$，$b_2>0$使得$s_0=s_0(b_1)=s_0(b_2)$. 由常微分理论可得(2),(4)式至少有两个解，即(1)式存在两个球对称解，从而定理得到证明.

参考文献:

[1] BANDLE C, COFFMAN C V, MARCUS M. Nonlinear Elliptic Problem in Annular Domains [J]. J Diff Equ, 1987, 69(2): 332-345.

[2] LIN S S. Existence of Positive Nonradial Solutions for Nonlinear Elliptic Equation in Annular Domains [J]. Trans Amer Math Soc, 1992, 332(2): 775-791.

[3] LIN S S. Positive Radial Solutions and Nonradial Bifurcation for Semilinear Elliptic Equation in Annular Domains [J]. J Differential Equation, 1990, 86(2): 367-391.

[4] 邓宗琦. 常微分方程边值问题和Sturm比较理论[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1990.

[5] DENG Yin-bin, GUO Zhen-hua, WANG Geng-sheng. Nodal Solutions for p-Laplactions with Critical Growth [J]. Nonlinear Analysis, 2003, 54(5): 1121-1151.

[6] CHU Chang-mu, TANG Chun-lei. On a Positive Solutions for a Class Cooperative Elliptic Systems [J]. 西南大学学报: 自然科学版, 2008, 30(2): 5-9.

[7] OU Zeng-qi, TANG Chun-lei. Existence of Solutions for a Class of Semilinear Elliptic Equations [J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2007, 32(1): 1-5.

Study on the Radial Solutions for Semilinear Elliptic Equation with the Hardy Term

GUO Jie, GUO Shu-mei, ZHANG Ning

Department of Science, The People's Liberation Army Information Engineering University, Zhengzhou 450001, China

Abstract: In this paper, the existence of symmetric solutions for the semilinear elliptic problem with Hardy term is discussed, and the radial solution for the problem is obtained, using the shooting method and the implicit function theorem according to the conditions for the perturbation $f(u)$.

Key words: radial solution; Sturm comparison theorem; shooting method; the implicit function theorem

责任编辑 张 枸