

# 距离度量下的一类非线性系统输出反馈控制<sup>①</sup>

张爱文, 谢成康

西南大学 数学与统计学院, 重庆 400715

**摘要:** 针对一类非线性项下三角形依赖的输出反馈控制系统, 在非线性距离度量框架下, 设计状态观测器和反馈控制律稳定闭环, 并分析控制器的鲁棒性. 在有测量误差和输入误差时, 控制器实现了闭环在距离度量意义下的稳定. 当模型扰动小于正常数时, 控制器可实现对于模型扰动的鲁棒稳定性.

**关键词:** 非线性距离度量; 输出反馈; 鲁棒性

**中图分类号:** TP271+.9

**文献标志码:** A

在控制工程中, 由于传感器和控制装置的精度受限, 测量误差和输入误差是不可避免的. 另外, 用数学来表示物理对象和过程时, 建立的数学模型也不可能完全准确地刻画物理对象和过程, 即存在模型扰动. 这二类误差和扰动都属于控制中的不确定因素. 一个控制设计要能够抑制这类不确定因素, 才能达到控制目的. 也就是控制器要具备鲁棒性, 才能使闭环的稳定性不会被破坏.

对于线性控制系统, 距离度量(gap metric)是较好的鲁棒控制框架, 并在鲁棒控制设计和分析中获得了成功. 但对于非线性控制系统, 由于系统自身的复杂性, 直到近年才借助于图论和范函分析理论, 提出了一种合适的拓扑结构, 相应的距离度量理论才较完整地建立起来<sup>[1-4]</sup>. 在非线性距离度量框架下, 可以较方便地考虑非线性控制系统对于测量误差、输入误差和模型扰动的鲁棒性. 然而, 另一方面, 控制设计也变得十分困难, 尤其是伴随观测器的输出反馈系统, 因此, 相关工作还比较少<sup>[5-7]</sup>.

在文献[7-9]中, 对非线性“下三角”系统的状态反馈控制问题, 利用反步法设计了状态反馈控制器, 得到了闭环在距离度量意义下的鲁棒稳定性. 文献[6]考虑了一类非线性项只依赖于可测信号的非线性项的输出反馈系统, 设计了观测器和输出反馈律. 对于更有价值的非线性项依赖于更多变量的系统的输出反馈控制问题, 至今还未见结果. 因此, 本文考虑下面输出反馈系统:

$$\dot{x}_1 = x_2 + \phi_1(x, u, t) \quad (1a)$$

$$\dot{x}_2 = x_3 + \phi_2(x, u, t) \quad (1b)$$

.....

$$\dot{x}_n = u_1 + \phi_n(x, u, t) \quad (1c)$$

$$y_1 = x_1 \quad (1d)$$

在距离度量意义下的鲁棒控制设计和分析, 其中  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  是系统状态,  $u_1$  和  $y_1$  是输入与输出,  $\phi_1(x, u, t), \phi_2(x, u, t), \dots, \phi_n(x, u, t)$  是非线性项.

在非线性距离度量框架下, 系统(1)的控制设计有两方面的困难. 一方面是系统的性态依赖于所有信号  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 而可以测量并用于反馈的信号只有  $x_1$ . 因此, 需要设计观测器, 而且对于非线性项  $\phi_1(x,$

① 收稿日期: 2010-01-18

基金项目: 教育部科学研究重点项目(107091); 教育部留学回国启动基金资助项目(210-413062).

作者简介: 张爱文(1984-), 男, 河南安阳人, 硕士研究生, 主要从事非线性控制研究.

通信作者: 谢成康, 教授.

$u, t), \phi_2(x, u, t), \dots, \phi_n(x, u, t)$  必须附加合适的限制条件, 系统才可控. 另一方面的困难是测量误差和输入误差带来的信号关系的不确定性的困难.

对于非线性项, 本文作下面的假设:

**假设 1** 存在常数  $c > 0$ , 使得

$$|\phi_i(x, u, t)| \leq c(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_i|) \quad (2)$$

对于  $i=1, 2, \dots, n$  成立.

这一假设实际上是非线性项满足线性增长的条件, 但比全局 Lipschitz 连续性要弱.

## 1 预备知识

先简单介绍非线性距离度量的有关内容, 详细的论述见文献[2-3, 5].

设  $U$  和  $Y$  为赋范信号空间,  $P$  表示标称因果受控对象,  $C$  是因果控制器,  $y_0$  和  $u_0$  分别代表测量误差与输入误差,  $y_1$  与  $y_2$  是输出信号实际值和测量值,  $u_1$  与  $u_2$  是输入信号实际值和控制输入值. 考虑下面的标准输出反馈图, 闭环记为  $[P, C]$ .

从算子(或映射)角度来看, 有  $P: u_1 \rightarrow y_1, C: y_2 \rightarrow u_2$ . 信号之间有如下关系:  $y_0 = y_1 + y_2, u_0 = u_1 + u_2$ . 由于测量误差  $y_0$  和输入误差  $u_0$  是不确定的, 实际上, 上述信号关系是不确定性的.

用  $W$  表示  $U \times Y$ , 并记  $w_0 = (u_0, y_0)^T, w_1 = (u_1, y_1)^T, w_2 = (u_2, y_2)^T$ . 定义闭环算子为

$$H_{P,C}: W \rightarrow W \times W, w_0 \mapsto (w_1, w_2)$$

受控对象  $P$  的图  $M$ 、控制器  $C$  的图  $N$  定义为

$$M = G_P = \{(u, Pu)^T: u \in U\} \subset W \quad N = G_C = \{(Cy, y)^T: y \in Y\} \subset W$$

引入算子  $\Pi_{M//N}: W \rightarrow W, w_0 \mapsto w_1$ , 于是有如下定义.

**定义 1** 称闭环系统  $[P, C]$  是稳定的, 如果算子  $\Pi_{M//N}$  的诱导范数存在, 即

$$\|\Pi_{M//N}\| = \sup_{w_0 \neq 0} \frac{\|\Pi_{M//N}w_0\|}{\|w_0\|} = \sup_{w_0 \neq 0} \frac{\|w_1\|}{\|w_0\|} < \infty$$

此外, 还可以定义一种较弱的稳定性, 即增益函数(gain-function)稳定性(gf-稳定性).

**定义 2** 关于  $\alpha$  的函数  $g[\Pi_{M//N}](\alpha) = \sup_{\|w_0\| \leq \alpha} \|\Pi_{M//N}w_0\|$  (其中  $\alpha \geq 0$ ) 称为算子  $\Pi_{M//N}$  的增益函数. 如果对一切  $\alpha \geq 0$ , 增益函数  $g[\Pi_{M//N}](\alpha)$  都是有限的, 则称闭环系统  $[P, C]$  为增益函数稳定, 或 gf-稳定.

根据泛函分析的知识, 容易得到: 如果存在常数  $\Gamma > 0$  使得

$$\|w_1\| \leq \Gamma \|w_0\| \quad w_1, w_0 \in W \quad (3)$$

那么  $[P, C]$  是稳定的; 如果存在连续函数  $\gamma(\cdot) > 0$  使得

$$\|w_1\| \leq \gamma(\|w_0\|) \quad w_1, w_0 \in W \quad (4)$$

那么  $[P, C]$  是 gf-稳定的.

最后定义标称受控对象  $P$  与扰动(物理)受控对象  $P_1$  的距离度量, 引出由非线性距离度量建立控制系统的鲁棒性定理.

**定义 3** 受控对象  $P$  和  $P_1$  的方向距离度量(directed gap metric) 定义为

$$\bar{\delta}(P, P_1) = \begin{cases} \inf_{\Phi \in \mathcal{O}} \|(\Phi - I)|_M\| & \text{如果 } \mathcal{O} \neq \emptyset \\ \infty & \text{如果 } \mathcal{O} = \emptyset \end{cases}$$

其距离度量定义为  $\delta(P, P_1) = \max\{\bar{\delta}(P, P_1), \bar{\delta}(P_1, P)\}$ . 其中  $\mathcal{O} = \{\Phi: M \rightarrow M_1 \mid \Phi \text{ 为因果一一映射, 且 } \Phi(0) = 0\}$ , 而  $M_1$  为  $P_1$  的图, 即  $\mathcal{G}_{P_1}$ .

**定理 A<sup>[2]</sup>** 设闭环  $[P, C]$  稳定. 如果扰动受控对象  $P_1$  满足

$$\bar{\delta}(P, P_1) < \frac{1}{\|\Pi_{M//N}\|}$$

则闭环  $[P_1, C]$  也稳定, 且

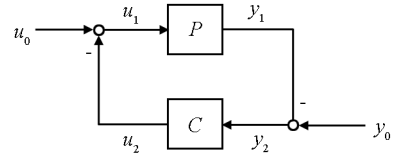


图 1 标准输出反馈图

$$\| \Pi_{M_1//N} \| \leq \| \Pi_{M//N} \| \frac{1 + \bar{\delta}(P, P_1)}{1 - \| \Pi_{M//N} \| \bar{\delta}(P, P_1)}$$

## 2 控制设计与分析

由于只有  $x_1$  可以用于反馈, 需要设计状态观测器来估计其它状态. 本文采用下面的观测器:

$$\dot{\hat{x}} = \hat{x}_2 + la_1(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (5a)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + l^2 a_2(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (5b)$$

.....

$$\dot{\hat{x}}_n = -u_2 + l^n a_n(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (5c)$$

其中  $l > 1$  是待定的增益常数, 选取常数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  使得  $s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$  是 Hurwitz 多项式.

令

$$\eta_i = \frac{\hat{x}_i}{l^{i-1}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

把(5)式表示为

$$\dot{\eta}_1 = l\eta_2 + la_1(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (7a)$$

$$\dot{\eta}_2 = l\eta_3 + la_2(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (7b)$$

.....

$$\dot{\eta}_n = -\frac{u_2}{l^{n-1}} + la_n(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (7c)$$

取常数  $b_1, b_2, \dots, b_n$  使得  $s^n + b_n s^{n-1} + \dots + b_2 s + b_1$  为 Hurwitz 多项式. 设计控制律为:

$$u_2 = -l^n (b_n \eta_1 + b_{n-1} \eta_2 + \dots + b_1 \eta_n) \quad (8)$$

最终控制器  $C$  由观测器(5)和控制律(8)组成.

**定理 1** 对于由(1),(5)和(8)式构成的闭环系统, 存在增益常数  $l > 1$  和连续函数  $\gamma(\cdot) > 0$ , 使得

$$\| (u_1, y_1)^T \|_\infty \leq \gamma(\| (u_0, y_0)^T \|_\infty)$$

即闭环系统是 gf-稳定的. 若系统(1)处于休息状态, 即初始状态为零, 则存在正常数  $\Gamma$ , 使得

$$\| (u_1, y_1)^T \|_\infty \leq \Gamma \| (u_0, y_0)^T \|_\infty$$

即闭环系统(在距离度量意义下)是稳定的. 其中范数定义为:  $\| (\cdot, \cdot)^T \|_\infty = \sqrt{\| \cdot \|_\infty^2 + \| \cdot \|_\infty^2}$ .

**证** 由(1)和(5)式得到观测误差  $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$  满足

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2 + \phi_1 - la_1(-y_2 - \hat{x}_1)$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3 + \phi_2 - l^2 a_2(-y_2 - \hat{x}_1)$$

.....

$$\dot{\tilde{x}}_n = u_0 + \phi_n - l^n a_n(-y_2 - \hat{x}_1)$$

作下面变换

$$\xi_i = \frac{\tilde{x}_i}{l^{i-1}} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

则  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  满足

$$\dot{\xi}_1 = l\xi_2 + \phi_1 - la_1(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (10a)$$

$$\dot{\xi}_2 = l\xi_3 + \frac{1}{l}\phi_2 - la_2(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (10b)$$

.....

$$\dot{\xi}_n = \frac{u_0}{l^{n-1}} + \frac{1}{l^{n-1}}\phi_n - la_n(-y_2 - \hat{x}_1) \quad (10c)$$

注意到  $-y_2 - \hat{x}_1 = y_1 - y_0 - \hat{x}_1 = \xi_1 - y_0$ , 并将(8)式代入(7)式, 则由(7)式与(10)式得

$$\dot{\eta} = l\mathbf{A}_1\eta + la\xi_1 - la y_0 \quad (11a)$$

$$\dot{\xi} = l\mathbf{A}_2\xi + \Phi(x) + la y_0 + \frac{1}{l^{n-1}}\mathbf{B}u_0 \quad (11b)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^\top \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top \quad \mathbf{B} = (0, 0, \dots, 1)^\top \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -b_1 & -b_2 & \cdots & -b_n \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ -a_{n-1} & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) \\ \frac{1}{l}\phi_2(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \frac{1}{l^{n-1}}\phi_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

由  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n$  的选择可得到  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ , 均是 Hurwitz 矩阵, 故存在正定对称矩阵  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  使  $\mathbf{A}_1^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}_1 = -3\mathbf{I}, \mathbf{A}_2^\top \mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_2 = -3\mathbf{I}$ .

对于闭环系统(11), 考虑 Lyapunov 函数  $V(t) = V_1(t) + (m+1)V_2(t)$ , 其中

$$m = \|\mathbf{P}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2 + 1 \quad V_1(t) = \eta^\top \mathbf{P}\eta \quad V_2(t) = \xi^\top \mathbf{Q}\xi$$

记号  $\|\cdot\|$  代表向量的 Euclid 范数和矩阵(作为线性变换算子)的诱导范数.

由(11)式知  $V_1$  沿闭环轨迹的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -3l\|\eta\|^2 + 2l\eta^\top \mathbf{P}\mathbf{a}\xi_1 - 2l\eta^\top \mathbf{P}\mathbf{a}y_0 \leq \\ & -l\|\eta\|^2 + l\|\mathbf{P}\|^2 \|\mathbf{a}\|^2 (\|\xi_1\|^2 + \|y_0\|^2) \leq \\ & -l\|\eta\|^2 + l(m-1)(\|\xi\|^2 + \|y_0\|^2) \end{aligned}$$

由(11)式知  $V_2$  沿闭环轨迹的导数满足

$$\dot{V}_2 = -3l\|\xi\|^2 + 2\xi^\top \mathbf{Q}\phi(x) - 2l\xi^\top \mathbf{Q}\mathbf{a}y_0 + \frac{2}{l^{n-1}}\xi^\top \mathbf{Q}\mathbf{B}u_0$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式, 可得

$$|2\xi^\top \mathbf{Q}\phi(x)| \leq 2\|\xi\| \cdot \|\mathbf{Q}\phi(x)\| \leq 2\|\xi\| \cdot \|\mathbf{Q}\| \cdot \|\Phi(x)\|$$

而

$$\|\Phi(x)\| = \sqrt{\phi_1^2 + \left(\frac{\phi_2}{l}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\phi_n}{l^{n-1}}\right)^2}$$

且可以知道

$$\left| \frac{\phi_i}{l^{i-1}} \right| \leq c\sqrt{n} (\|\eta\| + \|\xi\|) \quad i=1, 2, \dots, n$$

于是, 由假设(2)知

$$\begin{aligned} |2\xi^\top \mathbf{Q}\phi(x)| &\leq 2\|\mathbf{Q}\| \cdot \|\xi\| \sqrt{\phi_1^2 + \left(\frac{\phi_2}{l}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\phi_n}{l^{n-1}}\right)^2} \leq \\ & 2nc\|\mathbf{Q}\| \cdot \|\xi\| (\|\eta\| + \|\xi\|) \leq \\ & 3nc\|\mathbf{Q}\| (\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) \end{aligned}$$

成立. 因此

$$\dot{V}_2 \leq -l\|\xi\|^2 + 3nc\|\mathbf{Q}\| (\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2) + l\|\mathbf{Q}\|^2 \|\mathbf{A}\|^2 \|y_0\|^2 + \frac{1}{l^{n-1}}\|\mathbf{Q}\|^2 \|u_0\|^2$$

经过计算可得

$$\dot{V} = \dot{V}_1 + (m+1)\dot{V}_2 \leq -(l-3ncm\|\mathbf{Q}\|) (\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) + \alpha (\|u_0\|_\infty, \|y_0\|_\infty)$$

其中, 为方便起见, 记

$$\alpha (\|u_0\|_\infty, \|y_0\|_\infty) = \frac{m}{l^{n-1}}\|\mathbf{Q}\|^2 \|u_0\|_\infty^2 + l(m\|\mathbf{Q}\|^2 \|\mathbf{A}\|^2 + m-1) \|y_0\|_\infty^2$$

选取增益常数

$$l > 3ncm \|Q\| + 1 \quad (12)$$

那么

$$\dot{V} \leq -(\|\eta\|^2 + \|\xi\|^2) + \alpha(\|u_0\|_\infty, \|y_0\|_\infty) \quad (13)$$

于是  $V(t)$  在下面紧集

$$S = \{(\eta, \xi) \mid \|\eta\|^2 + \|\xi\|^2 \leq \alpha(\|u_0\|_\infty^2, \|y_0\|_\infty^2)\}$$

之外递减, 故有:

$$\begin{aligned} \|\eta\|^2 + \|\xi\|^2 &\leq \max\{\|\eta^0\|^2 + \|\xi^0\|^2, \alpha(\|u_0\|_\infty^2, \|y_0\|_\infty^2)\} \leq \\ &\max\{\|\eta^0\|^2 + \|\xi^0\|^2, \sigma_1 \|u_0\|_\infty^2 + \sigma_2 \|y_0\|_\infty^2\} \leq \\ &\max\{\|\eta^0\|^2 + \|\xi^0\|^2, \sigma \|(u_0, y_0)^T\|^2\} = g(\|(u_0, y_0)^T\|) \end{aligned}$$

其中:  $\sigma_1 = \frac{m}{l^{n-1}} \|Q\|^2$ ,  $\sigma_2 = l(m \|Q\|^2 \|a\|^2 + m - 1)$ ,  $\sigma = 2 \max\{\sigma_1, \sigma_2\}$ ,  $\eta^0$  和  $\xi^0$  是  $\eta$  与  $\xi$  的初值. 此外

$\|y_1\|_\infty = \|x_1\|_\infty \leq \|x\|_\infty \leq \|\hat{x}\|_\infty + \|\tilde{x}\|_\infty$ , 于是

$$\begin{aligned} \|y_1\|_\infty &\leq \sqrt{2} \sqrt{\|\hat{x}\|_\infty^2 + \|\tilde{x}\|_\infty^2} \leq \sqrt{2} l^{n-1} \sqrt{\|\eta\|_\infty^2 + \|\xi\|_\infty^2} \leq \\ &\sqrt{2} l^{n-1} \sqrt{g(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty)} = \gamma_1(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty) \end{aligned}$$

对  $u_1$ , 显然  $\|u_1\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \|u_2\|_\infty$ . 而从(8)式知道

$$\begin{aligned} \|u_1\|_\infty &\leq \|u_0\|_\infty + bl^n(|\eta_1| + |\eta_2| + \dots + |\eta_n|) \leq \\ &\|(u_0, y_0)^T\|_\infty + nbl^n \sqrt{g(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty)} = \\ &\gamma_2(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty) \end{aligned}$$

最后得到关于  $\|(u_1, y_1)^T\|$  的估计

$$\begin{aligned} \|(u_1, y_1)^T\|_\infty &\leq \|u_1\|_\infty + \|y_1\|_\infty \leq \gamma_1(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty) + \gamma_2(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty) = \\ &\gamma(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty) \end{aligned} \quad (14)$$

从而, 闭环系统是 gf-稳定的.

因为初始状态为零, 于是观测器的初值取为零, 从而  $\eta^0 = \xi^0 = 0$ , 所以  $g(\|(u_0, y_0)^T\|) = \max\{0, \sigma \|(u_0, y_0)^T\|^2\} = \sigma \|(u_0, y_0)^T\|^2$ . 再由

$$\gamma_1(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty) = \sqrt{2\sigma} l^{n-1} \sqrt{g(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty)} = \sqrt{2\sigma} l^{n-1} \|(u_0, y_0)^T\|_\infty$$

$$\gamma_2(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty) = \|(u_0, y_0)^T\|_\infty + nbl^n \sqrt{g(\|(u_0, y_0)^T\|_\infty)} = (1 + nbl^n \sqrt{\sigma}) \|(u_0, y_0)^T\|_\infty$$

令

$$\Gamma = \sqrt{2\sigma} l^{n-1} + nbl^n \sqrt{\sigma} + 1 \quad (15)$$

于是  $\|(u_1, y_1)^T\|_\infty \leq \gamma \|(u_0, y_0)^T\|_\infty$ . 定理 2 证毕.

结合定理 1 和定理 A, 可以建立如下对模型扰动的鲁棒稳定结果.

**推论 1** 设受控对象  $P$  的初始状态为零, 控制器  $C$  由(5)和(8)式给定. 对于任意(扰动)受控对象  $P_1$ , 如果  $\bar{\delta}(P, P_1) < 1/\Gamma$ , 则闭环系统  $[P_1, C]$  也是稳定的, 其中  $\Gamma$  由(15)式定义.

由定理可见, 如果视  $P_1$  为物理受控对象,  $P$  为其标称受控对象(数学模型). 那么, 对  $P$  设计控制器  $C$  使闭环  $[P, C]$  稳定, 若  $P_1$  与  $P$  的距离适当小则闭环  $[P_1, C]$  也稳定. 由此说明控制器  $C$  具有鲁棒性. 由于测量误差  $u_0$  和输入误差  $y_0$  造成信号  $u_1$  与  $u_2$ ,  $y_1$  与  $y_2$  的关系不确定, 在观测器和控制律作用下的闭环稳定性分析变得很困难. 为了克服这一困难, 文献[5-6]假设了非线性项为全局 Lypschitz 连续, 因此可以设计线性的控制律. 本文利用了高增益观测器来设计控制律, 可以把非线性项假设放松到满足线性增长的条件(2). 有兴趣的读者可参阅文献[8-9].

参考文献:

- [1] GEORGIU T, SMITH M. Optimal Robustness in the Gap Metric [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1990, 35(6): 461-478.
- [2] GEORGIU T, SMITH M. Robustness Analysis of Nonlinear Feedback Systems: an Input-Output Approach [J]. IEEE

Transactions on Automatic Control, 1997, 42(9): 1200–1221.

- [3] GEORGIU T, SMITH M. Remarks on “Robustness Analysis of Nonlinear Feedback Systems: an Input-Output Approach” [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(1): 171–172.
- [4] FRENCH M. Adaptive Control and Robustness in the Gap Metric [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(2): 461–478.
- [5] XIE Cheng-kang, FRENCH M. Gap Metric Robustness of a Backstepping Control Design [C]//Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control. New York: IEEE Press, 2003: 5180–5184.
- [6] XIE Cheng-kang, HUANG Wei, ZHOU Zhong-cheng, et al. A Nonlinear Output Feedback Control for Robust Stability in Gap Metric [C]// Proceeding of the 2007 American Control Conference. New York: IEEE Press, 2007: 2624–2629.
- [7] 谢成康, 林 意. 鲁棒稳定后推控制设计 [J]. 控制与决策, 2007, 22(10): 1181–1188.
- [8] QIAN Chun-jiang, SCHRADER C, LIN Wei. Global Regulation of a Class of Uncertain Nonlinear Systems Using Output Feedback [C]// Proceeding of American Control Conference. New York: IEEE Press, 2003: 1542–1547.
- [9] ALIMHAN K, INABA H. Output Feedback Control for a Class of Nonlinear Systems [J]. International journal of automation and computing, 2006, 3(3): 215–221.

## Output Feedback Control for a Class of Nonlinear Systems in Gap Metric

ZHANG Ai-wen, XIE Cheng-kang

*School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China*

**Abstract:** For the lower triangular nonlinear system, an observer and feedback control system are constructed to stabilize the closed-loop within the framework of nonlinear gap metric. In the presence of input error and measurement error, the designed controller is able to stabilize the closed-loop in the sense of gap metric. In the case that the plant perturbation is smaller than some positive constant, the controller achieves robust stability to the plant perturbation.

**Key words:** nonlinear gap metric; output feedback; robustness

责任编辑 张 桢