文章编号:1000-5471(2013)10-0001-04

弱核向量值奇异积分算子的加权不等式及端点估计①

冯文莉

石家庄学院 数学与信息科学学院,石家庄 050035

摘要: 把向量值奇异积分算子的核由标准型减弱成 Dini 型,证明了 Dini 型核向量值奇异积分算子的加权不等式以及端点估计结论.

关 键 词: 奇异积分算子;Dini 型核;加权不等式;端点估计

中图分类号: O178;O174.2 **文献标志码:** A

设

$$Tf(x)=p.v.\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y \tag{1}$$

是一个标准核的奇异积分算子,其核 $K(x,y)$ 满足文献[1]中标准核的条件. 文献[1]给出了算子 T 的加权不等式和端点估计. 文献[2]给出了和算子 T 相联系的向量值奇异积分算子及交换子关于任意权的加权不等式和端点估计. 现把(1)式中算子 T 的核减弱成 Dini 型核 $\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}$,得

$$Tf(x)=p.v.\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n}f(y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

其中 Ω 满足以下条件:

(i) $\Omega(\lambda x)=\Omega(x)$,$\lambda>0$;

(ii) $\int_{S^{n-1}}\Omega(x)\mathrm{d}\sigma(x)=0$;

(iii) (Dini 型条件) $\int_0^1\frac{\omega(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta<\infty$,$\omega(\delta)=\sup\{|\Omega(x)-\Omega(y)|:|x-y|<\delta,\ x,y\in S^{n-1}\}$.

由(2)式定义的奇异积分算子 T 满足 Hormander's 条件,因此它关于任意权是强(p,p)有界和弱$(1,1)$的[3],其中 $1<p<\infty$.

设 $f(x)=\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$,和(2)式相联系的向量值奇异积分算子定义为

$$T_qf(x)=|Tf(x)|_q=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|Tf_j(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3}$$

算子的核决定着和算子相关的不等式. 文献[4]证明了和(3)式有关的几个加权不等式. 文献[5]证明了和(3)式相联系的交换子的加权不等式. 文献[6]证明了一个实齐次核的 Hilbert 型不等式. 文献[7]得到了一个新积分核下的 Hilbert 型不等式. 现继续考虑具有 Dini 型核的向量值奇异积分算子 $T_qf(x)$ 的加权不等式及端点估计.

函数 $A:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 称为 Young 函数,若 A 是连续递增的凸函数,且满足 $A(0)=0$,$A(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$. 称 A 满足二倍条件,若存在常数 $C>0$,$k\geqslant 0$,使得当 $t>k$ 时,$A(2t)\leqslant CA(t)$. 权函数 $\omega(x)$ 是指 $\mathbb{R}^n$ 上的非负局部可积函数. $\omega(x)$ 满足 A_∞ 条件是指存在常数 C,$\delta>0$,使得对 $\mathbb{R}^n$ 中任意方体 Q 以及

① 收稿日期:2012-02-21
基金项目:河北省教育厅自然科学项目(Z2012003);石家庄学院自然科学基金项目(11YB009).
作者简介:冯文莉(1977-),女,河北石家庄人,讲师,主要从事调和分析和小波分析的研究.

任意可测集 $E \subset Q$，有 $\omega(E) \leqslant C(\frac{|E|}{|Q|})^{\delta}\omega(Q)$. 设 A 为 Young 函数，定义 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f 在方体 Q 上的 A 平均为下列 Luxemburg 范数：

$$\| f \|_{A,Q} = \inf\left\{\lambda > 0: \frac{1}{|Q|}\int_Q A(\frac{|f(y)|}{\lambda})\mathrm{d}y \leqslant 1\right\}$$

相应的极大函数定义为 $M_A(f)(x) = \sup\limits_{x \in Q} \| f \|_{A,Q}$.

定理1 设 $1 < p, q < +\infty$，$\omega(x)$ 是一个权，T_q 是一个由(3)式定义的核满足条件(i),(ii),(iii)的向量值奇异积分算子，设 $A(t)$ 是满足条件

$$\int_c^{\infty} (\frac{t}{A(t)})^{p'-1}\frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty \tag{4}$$

的二倍 Young 函数，这里 $c > 0$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$，则存在常数 $C > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_q f(x))^p \omega(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q^p M_A\omega(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

其中 $f(x) = \{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$，$|f(x)|_q = (\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^q)^{\frac{1}{q}}$.

证 由对偶方法，只需证 $\int_{\mathbb{R}^n} (T_{q'}^* f(x))^{p'}(M_A\omega(x))^{1-p'}\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_{q'}^{p'}\omega(x)^{1-p'}\mathrm{d}x$.

对 $f_m = (f_1, f_2, \cdots, f_m, 0, \cdots)$ 证明：存在不依赖于 m 的常数 C 满足(5)式. 然后设 m 取到 ∞ 即可. 文献[1]中指出 $(M_A\omega(x))^{1-p'} \in A_{\infty}$，以及 T^* 也是具有 Dini 型核的奇异积分算子，则

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_{q'}^* f(x))^{p'}(M_A\omega(x))^{1-p'}\mathrm{d}x < \infty$$

应用文献[4]中定理2和文献[2]中定理2.2可得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_{q'}^* f(x))^{p'}(M_A\omega(x))^{1-p'}\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} (M(|f|_{q'})(x))^{p'}(M_A\omega(x))^{1-p'}\mathrm{d}x \leqslant$$
$$C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_{q'}^{p'}\omega(x)^{1-p'}\mathrm{d}x$$

定理1得证.

特别地，取定理1中的 $A(t) = t(1 + \log^+ t)^{p-1+\varepsilon}$，$\varepsilon > 0$，可得下列结果：

推论1 设 $1 < p, q < +\infty$，ω 是一个权，T_q 是一个由(3)式定义的核满足条件(i),(ii),(iii)的向量值奇异积分算子，则

(1°) 对任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_q f(x))^p \omega(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q^p M_{L(\log L)^{p-1+\varepsilon}}\omega(x)\mathrm{d}x$$

(2°) 存在常数 $C > 0$，使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (T_q f(x))^p \omega(x)\mathrm{d}x \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q^p M^{[p]+1}\omega(x)\mathrm{d}x$$

定理2 设 $1 < q < +\infty$ 及 $\varepsilon > 0$，T_q 是一个由(3)式定义的核满足条件(i),(ii),(iii)的向量值奇异积分算子，则存在常数 $C > 0$，使得对任意权 ω 和 $\lambda > 0$，任意光滑的向量值函数 f，有

$$\omega(\{y \in \mathbb{R}^n: |T_q f(y)| > \lambda\}) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|_q M_{L(\log L)^{\varepsilon}}\omega(x)\mathrm{d}x$$

证 对 $\lambda > 0$，由 Calderon-Zygmund 分解，得到互不相交的二进方体族 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty} = \{Q_j(z_j, r_j)\}_{j=1}^{\infty}$，满足 $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(y)|_q\mathrm{d}y \leqslant 2^n\lambda$. 记 $\Omega = \Omega_{\lambda} = \bigcup_j Q_j$，则

$$|f(x)|_q \leqslant \lambda \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega$$

记 $f = g + b$，其中

$$g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty} \qquad g_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & x \in \mathbb{R}^n \backslash \Omega \\ (f_i)_{Q_j} & x \in Q_j \end{cases}$$

又因

$$|g(x)|_q \leqslant 2^n\lambda \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

$$b(x)=\{b_i(x)\}_{i=1}^{\infty}=\{\sum_j b_{ij}(x)\}_{i=1}^{\infty}$$

其中 $b_{ij}(x)=(f_i(x)-(f_i)_{Q_j})\chi_{Q_j}(x)$. 设 $\tilde{Q}_j=2Q_j$，及 $\tilde{\Omega}=\bigcup_j\tilde{Q}_j$，则

$$\omega(\{y\in\mathbb{R}^n:|T_qf(y)|>\lambda\})\leqslant$$
$$\omega(\{y\in\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}:|T_qg(y)|>\frac{\lambda}{2}\})+\omega(\tilde{\Omega})+\omega(\{y\in\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}:|T_qb(y)|>\frac{\lambda}{2}\})$$

先估计 $\omega(\{y\in\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}:|T_qg(y)|>\frac{\lambda}{2}\})$. 对 $\varepsilon>0$，取 p 使 $1<p<1+\varepsilon$，则 $A_\varepsilon(t)=t\log^\varepsilon(1+t)$ 满足(4) 式. 由定理 1 得

$$\omega(\{y\in\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}:|T_qg(y)|>\frac{\lambda}{2}\})\leqslant\frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}}(T_qg(y))^p\omega(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|_q^pM_{L(\log L)^\varepsilon}\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}}\omega(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda^p}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\Omega}|f(y)|_q^pM_{L(\log L)^\varepsilon}\omega(y)\mathrm{d}y+\frac{C}{\lambda^p}\int_{\Omega}|g(y)|_q^pM_{L(\log L)^\varepsilon}\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}}\omega(y)\mathrm{d}y=\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

由 $|f(x)|_q\leqslant\lambda(\text{a. e. }x\in\mathbb{R}^n\backslash\Omega)$ 得 $I\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|_qM_{L(\log L)^\varepsilon}\omega(y)\mathrm{d}y$.

对 II，考虑到对任意 j 以及任意 $y,z\in Q_j$，有 $M_{L(\log L)^\varepsilon}(\chi_{\mathbb{R}^n\backslash 2Q_j}\omega)(y)\approx M_{L(\log L)^\varepsilon}(\chi_{\mathbb{R}^n\backslash 2Q_j}\omega)(z)$. 由 Minkowski's 不等式得

$$\mathrm{II}=\frac{C}{\lambda^p}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}|g(y)|_q^pM_{L(\log L)^\varepsilon}(\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}}\omega)(y)\mathrm{d}y=$$
$$\frac{C}{\lambda^p}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}(\sum_{i=1}^{\infty}|(f_j)_{Q_j}|^q)^{\frac{p}{q}}M_{L(\log L)^\varepsilon}(\chi_{\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}}\omega)(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda^p}\sum_{Q_j}(\sum_{i=1}^{\infty}|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f_i(z)\mathrm{d}z|^q)^{\frac{p}{q}}|Q_j|\inf_{y\in Q_j}M_{L(\log L)^\varepsilon}(\chi_{\mathbb{R}^n\backslash 2Q_j}\omega)(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda^p}(\sum_{i=1}^{\infty}|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(z)|_q\mathrm{d}z|)^p|Q_j|\inf_{y\in Q_j}M_{L(\log L)^\varepsilon}\omega(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda}(\sum_{i=1}^{\infty}|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(z)|_q\mathrm{d}z|)|Q_j|\inf_{y\in Q_j}M_{L(\log L)^\varepsilon}\omega(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|_qM_{L(\log L)^\varepsilon}\omega(y)\mathrm{d}z$$

再估计 $\omega(\tilde{\Omega})$. 易得

$$\omega(\tilde{\Omega})\leqslant C\sum_{Q_j}\frac{\omega(2Q_j)}{|2Q_j|}|2Q_j|\leqslant\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\frac{\omega(2Q_j)}{|2Q_j|}\int_{Q_j}|f(y)|_q\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}|f(y)|_qM\omega(y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|_qM_{L(\log L)^\varepsilon}\omega(y)\mathrm{d}y$$

对 $\omega(\{y\in\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}:|T_qb(y)|>\frac{\lambda}{2}\})$，由 Dini 型核满足条件(i)，(ii)，(iii)，及每个 b_{ij} 在 Q_j 上都有零平均，有

$$\omega(\{y\in\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}:|T_qb(y)|>\frac{\lambda}{2}\})\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}}|T_qb(y)|\omega(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\backslash\tilde{\Omega}}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}\left[\sum_{i=1}^{\infty}|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n}-\frac{\Omega(y-z_j)}{|y-z_j|^n}|^q|b_{ij}(z)|^q\right]^{\frac{1}{q}}\mathrm{d}z\omega(y)\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}(\int_{\mathbb{R}^n\backslash 2Q_j}|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n}-\frac{\Omega(y-z_j)}{|y-z_j|^n}||b_j(z)|_q\omega(y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}z\leqslant$$
$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}|b_j(z)|_q(\sum_{k=1}^{\infty}\int_{2^{k-1}r_j\leqslant|y-z_j|\leqslant 2^kr_j}|\frac{\Omega(y-z)}{|y-z|^n}-\frac{\Omega(y-z_j)}{|y-z_j|^n}|\omega(y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}|b_j(z)|_q\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega(2^{2-k})+2^{-k}}{(2^{k-1}r_j)^n}\int_{2^{k-1}r_j\leqslant|y-z_j|\leqslant 2^k r_j}\omega(y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}|b_j(z)|_q\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\omega(c_0 2^{-k})+\frac{1}{2^k}\Big)M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j}\omega)(z)\mathrm{d}z\leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\Big(\int_0^{c_0}\frac{\omega(\delta)}{\delta}\mathrm{d}\delta+1\Big)\Big[\int_{Q_j}|f(z)|_q M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j}\omega)(z)\mathrm{d}z+\int_{Q_j}|g(z)|_q M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j}\omega)(z)\mathrm{d}z\Big]\leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}|f(z)|_q M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j}\omega)(z)\mathrm{d}z+\int_{Q_j}|g(z)|_q M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j}\omega)(z)\mathrm{d}z=\mathrm{III}+\mathrm{IV}$$

容易得到，$\mathrm{III}\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|_q M_{L(\log L)^\varepsilon}\omega(z)\mathrm{d}z$. 另外，

$$\mathrm{IV}\leqslant\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\Big|\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}f_i(z)\mathrm{d}z\Big|^q\Big]^{\frac{1}{q}}\int_{Q_j}M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j}\omega)(y)\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(z)|_q\mathrm{d}z\,|Q_j|\inf_{y\in Q_j}M(\chi_{\mathbb{R}^n\setminus 2Q_j}\omega)(y)\leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(z)|_q\mathrm{d}z\,|Q_j|\inf_{y\in Q_j}M\omega(y)\leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_{Q_j}\int_{Q_j}|f(z)|_q M\omega\,\mathrm{d}z\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f(z)|_q M_{L(\log L)^\varepsilon}\omega\,\mathrm{d}z$$

定理 2 得证.

参考文献：

[1] PEREZ C. Weighted Norm Inequalities for Singular Integral Operators [J]. J London Math Soc, 1994(2): 296－308.

[2] PEREZ C, TRUJILLO-GONZALEZ R. Sharp Weighted Estimates for Vector-Valued Singular Integral Operators and Commutators [J]. Tohoku Math J, 2003, 55: 109－129.

[3] STEIN E M. Singular Integral and Differentiability Properties of Functions [M]. Princeton: Princeton Univ Press, 1970: 48－49.

[4] 冯文莉，田贵辰，李文明. 具有 Dini 型核的向量值奇异积分算子的加权赋范不等式 [J]. 河北科技大学学报，2009，30(3): 201－203.

[5] 冯文莉，白云芬，孙庆利. Dini 型核向量值奇异积分算子交换子的加权赋范不等式 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(5): 45－49.

[6] 杨必成. 一个实齐次核的 Hilbert 型不等式 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2010，35(1): 40－44.

[7] 洪 勇. 一个新积分核下的 Hilbert 型不等式及最佳常数因子 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(6): 153－156.

On Weighted Inequalities and Endpoint Estimate for Vector-Valued Singular Integral Operators with Weak-Type Condition

FENG Wen-li

College of Mathematics and Information Science, Shijiazhuang University, Shijiazhuang 050035, China

Abstract: Now the standard condition has been declined to that which the kernel of vector-valued singular integral operators satisfying to weak Dini-type condition, and it proves that weighted inequalities and endpoint estimate results for vector-valued singular integral operators with Dini-type kernel.

Key words: singular integral operator; Dini-type kernel; weighted inequality; endpoint estimate

责任编辑 廖 坤