文章编号:1000-5471(2013)10-0001-04

一类边界奇异带有临界 Sobolev 指数的非齐次 Neumann 问题的两个正解的存在性①

宋园园, 吴行平, 唐春雷

西南大学 数学与统计学院,重庆 400715

摘要: 主要研究了一类边界奇异带有临界 Sobolev 指数的非齐次 Neumann 问题. 运用 Ekeland 变分原理和山路引理,得到了该问题两个正解的存在性.

关 键 词: 边界奇异;临界 Sobolev 指数;非齐次 Neumann 问题;Ekeland 变分原理;山路引理

中图分类号: O176.3 **文献标志码:** A

本文主要考虑边界奇异的椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta u-\mu \dfrac{u}{|x|^2}+\lambda u=\{|u|^{2^*-2}u\}+f(x) & x\in\Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{v}}=0 & x\in\partial\Omega\backslash\{0\} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 3)$ 是有光滑边界的有界开区域,$0\in\partial\Omega$,$0\leqslant\mu<\bar{\mu}=\dfrac{(N-2)^2}{4}$,$\lambda$ 是正常数,$2^*=\dfrac{2N}{N-2}$ 是临界 Sobolev 指数,$f\in L^2(\Omega)$,$f>0$,$\boldsymbol{v}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向.

许多学者研究了带有 Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程[1-9]. 对于方程(1),当 $\mu=0$,$f(x)=0$ 时,文献[1] 利用没有(PS)条件的山路引理得到一个正解;当 $\mu\neq 0$,$f(x)=0$ 时,文献[2] 在 $N\geqslant 5$ 的情况下得到一个正解;文献[3] 研究了带有一般非线性形式 $g(x,u)$ 的低阶小扰动. 但当 $\mu\neq 0$,$0\in\partial\Omega$ 时,还没有人研究带有非其次项 $f(x)$ 的 Neumann 问题.

由于方程(1)在原点奇异并且含有临界Sobolev指数,嵌入 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ 和 $H^1(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega,|x|^{-2})$ 不具有紧性,从而,方程(1)所对应的能量泛函不满足(PS)条件,但可以证明它满足局部的(PS)条件(见后文).

本文中 C_i 或 c_i 将用来表示各种正常数,$B_r(x)$ 表示以 x 为中心,r 为半径的球,$\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 分别标记 $H^1(\Omega)$ 和 $L^p(\Omega)$ 空间的范数,$H(0)$ 表示在原点处边界的平均曲率.

在文献[3] 中,作者 J. Chabrowski 给出:当 $0\in\partial\Omega$ 时,对任何 $\varepsilon>0$,都存在 $C(\varepsilon)>0$,使得

$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x\leqslant\left(\frac{1}{\mu}+\varepsilon\right)\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+C(\varepsilon)\int_\Omega u^2\mathrm{d}x \qquad u\in H^1(\Omega)$$

因此,$\mu^*=\inf\{\int_\Omega(|\nabla u|^2+\lambda u^2)\mathrm{d}x:u\in H^1(\Omega),\int_\Omega\frac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x=1\}>0$. 当 $0\leqslant\mu<\mu^*$ 时,定义等价范

① 收稿日期:2013-03-28
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11071198).
作者简介:宋园园(1986-),女,山西天镇人,硕士研究生,主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者:唐春雷,教授,博士生导师.

数 $\|u\|=\left(\int_{\Omega}(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}+\lambda u^2)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

本文的主要结果为:

定理1 假设 $0\leqslant\mu<\min\{\mu^*,\overline{\mu}\}$,$\lambda>0$,$f\in L^2(\Omega)$ 满足 $f>0$ 和 $H(0)>0$,则存在正数 $\delta>0$,使得当 $\|f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta$ 时,方程(1)至少存在两个正解 u_1,u_2,满足 $I(u_1)<0<I(u_2)$.

方程(1)所对应的能量泛函为

$$I(u)=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2}+\lambda u^2\right)\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*}\int_{\Omega}(u^+)^{2^*}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}fu\,\mathrm{d}x$$

根据 Hardy 不等式、Sobolev 不等式[3] 得 $I\in C^1(H^1(\Omega),\mathbb{R})$. 方程(1)的弱解与 I 在 $H^1(\Omega)$ 上的临界点一一对应. 称 u 是方程(1)的弱解,若对于任何 $v\in H^1(\Omega)$,有

$$\langle I'(u),v\rangle=\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v-\mu\frac{uv}{|x|^2}+\lambda uv)\mathrm{d}x-\int_{\Omega}(u^+)^{2^*-1}v\mathrm{d}x-\int_{\Omega}fv\mathrm{d}x=0$$

最佳 Sobolev 常数

$$S_\mu=\inf_{u\in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}}\frac{\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^2-\mu\frac{u^2}{|x|^2})\mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}}$$

与 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 无关,从而 $S_\mu(\Omega)=S_\mu(\mathbb{R}^N)=S_\mu$. 对于 $\varepsilon>0$,函数族

$$u_\varepsilon^*(x)=\frac{C_N\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2|x|^{\frac{\gamma'}{\sqrt{\mu}}}+|x|^{\frac{\gamma}{\sqrt{\mu}}})^{\sqrt{\mu}}}$$

(这里 $\gamma'=\sqrt{\overline{\mu}}-\sqrt{\overline{\mu}-\mu}$,$\gamma=\sqrt{\overline{\mu}}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}$,$C_N=\left(\frac{4N(\overline{\mu}-\mu)}{N-2}\right)^{\frac{N-2}{4}}$.)是方程

$$-\Delta u-\mu\frac{u}{|x|^2}=|u|^{2^*-2}u\qquad x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$$

的解,并且有

$$\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u_\varepsilon^*|^2-\mu\frac{|u_\varepsilon^*|^2}{|x|^2})\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}|u_\varepsilon^*|^{2^*}\mathrm{d}x=S_\mu^{\frac{N}{2}}$$

令 $\mu^{**}=\min\{\mu^*,\overline{\mu}\}$. 对于任何 $\varepsilon>0$ 和 $0\leqslant\mu<\mu^{**}$,令

$$u_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\frac{N-2}{2}}}{(\varepsilon^2|x|^{\frac{\gamma'}{\sqrt{\mu}}}+|x|^{\frac{\gamma}{\sqrt{\mu}}})^{\sqrt{\mu}}}$$

引理1 假设 $0\leqslant\mu<\mu^{**}$,$\lambda>0$ 和 $f\in L^2(\Omega)$,则对于 $c<\frac{1}{2N}S_\mu^{\frac{N}{2}}-C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2$,泛函 I 满足$(PS)_c$ 条件.

证 设 $\{u_n\}\subset H^1(\Omega)$ 是 I 的$(PS)_c$ 序列,则存在 $C_1>0$ 使得 $|I(u_n)|\leqslant C_1$ 和 $\langle I'(u_n),u_n\rangle\leqslant C_1\|u_n\|$. 于是

$$\begin{aligned}C_1(1+\|u_n\|)\geqslant&I(u_n)-\frac{1}{2^*}\langle I'(u_n),u_n\rangle=\\&(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*})\|u_n\|^2-(1-\frac{1}{2^*})\int_{\Omega}fu_n\mathrm{d}x\geqslant\\&(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*})\|u_n\|^2-(1-\frac{1}{2^*})\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|\end{aligned}$$

因此 $\{u_n\}$ 有界. 从而,存在子序列(仍记为 $\{u_n\}$),使得在 $H^1(\Omega)$ 中,$u_n\rightharpoonup u$;在 $L^r(\Omega)$ 中,$u_n\to u$,$1<r<2^*$;在 Ω 中几乎处处成立 $u_n(x)\to u(x)$. 显然,$\int_{\Omega}fu_n\mathrm{d}x\to\int_{\Omega}fu\mathrm{d}x$.

令 $v_n=u_n-u$,由 $I(u_n)\to c(n\to\infty)$ 和 Brezis-Lieb 引理[4] 知

$$I(u_n)=\frac{1}{2}\|v_n\|^2+\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2^*}\int_{\Omega}|v_n^+|^{2^*}\mathrm{d}x-\frac{1}{2^*}\int_{\Omega}|u^+|^{2^*}\mathrm{d}x-\int_{\Omega}f(x)u_n\mathrm{d}x+o(1)=$$

$$I(u)+\frac{1}{2}\|v_n\|^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega |v_n^+|^{2^*}\mathrm{d}x+o(1)=c+o(1) \tag{2}$$

由 $\langle I'(u_n),u_n\rangle\to 0$ 和 Brezis-Lieb 引理知

$$\|v_n\|^2+\|u\|^2-\int_\Omega |v_n^+|^{2^*}\mathrm{d}x-\int_\Omega |u^+|^{2^*}\mathrm{d}x-\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x=o(1) \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\langle I'(u_n),u_n\rangle=\|u\|^2-\int_\Omega |u^+|^{2^*}\mathrm{d}x-\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x=0 \tag{4}$$

又由(4)式知

$$\begin{aligned}I(u)=&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\|u\|^2\mathrm{d}x-\left(1-\frac{1}{2^*}\right)\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x\geqslant\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}\right)\|u\|^2\mathrm{d}x-\left(1-\frac{1}{2^*}\right)\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|\geqslant\\&-C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2\end{aligned} \tag{5}$$

这里 $C=\frac{(N+2)^2}{16}$. 由(3)式和(4)式知，$\|v_n\|^2-\int_\Omega |v_n^+|^{2^*}\mathrm{d}x=o(1)$. 因此，不失一般性，我们可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n\|^2=\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega |v_n^+|^{2^*}\mathrm{d}x=l(l\geqslant 0)$. 若 $l=0$，则 $\|v_n\|^2\to 0\ (n\to\infty)$，引理 1 得证；若 $l>0$，根据文献[3]的引理 3.1 可以得到，对于任何 $\varepsilon>0$，存在 $C_1(\varepsilon)$ 使得

$$\int_\Omega\left(|\nabla v_n|^2-\mu\frac{{v_n}^2}{|x|^2}+\lambda v_n^2\right)\mathrm{d}x+C_1(\varepsilon)\int_\Omega v_n^2\mathrm{d}x\geqslant(2^{-\frac{2}{N}}S_\mu-\varepsilon)\left(\int_\Omega |v_n^+|^{2^*}\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{2^*}}$$

则当 $n\to\infty$ 时，$l\geqslant(2^{-\frac{2}{N}}S_\mu-\varepsilon)^{l^{\frac{2}{2^*}}}$，由 $l\neq 0$ 和 ε 的任意性知 $l\geqslant\frac{1}{2}S_\mu^{\frac{N}{2}}$，而由(2)式知

$$I(u)=c-\frac{l}{2}+\frac{l}{2^*}\leqslant c-\frac{1}{2N}S_\mu^{\frac{N}{2}}<-C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2$$

与(5)式矛盾. 因此，当 $n\to\infty$ 时，$\|v_n\|^2\to 0$，即在 $H^1(\Omega)$ 中，$u_n\to u(n\to\infty)$.

引理 2　假设 $0\leqslant\mu<\mu^{**}$，则存在正数 $\delta_1>0$，使得当 $\|f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta_1$ 时，存在 $\alpha>0$ 和 $\rho>0$ 满足 $\inf\limits_{\|u\|=\rho}I(u)\geqslant\alpha>0$.

证　由 Sobolev 不等式知，存在 $C_2>0$ 使得

$$I(u)=\frac{1}{2}\|u\|^2-\frac{1}{2^*}\int_\Omega |u^+|^{2^*}\mathrm{d}x-\int_\Omega fu\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\|u\|^2-C_2\|u\|^{2^*}-\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|$$

则存在 $\delta_1>0$，使得当 $\|f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta_1$ 时，存在 $\alpha>0$ 和 $\rho>2\delta_1>0$ 满足 $\inf\limits_{\|u\|=\rho}I(u)\geqslant\alpha>0$.

定理 1 的证明

定义 $d(u,v)=\|u-v\|$，则度量空间 $(\overline{B_\rho}(0),d)$ 是完备的. 通过 Ekeland 变分原理，存在一个 $(\mathrm{PS})_c$ 序列 $\{u_n\}\subset\overline{B_\rho}(0)$，且 $c_1=\inf\limits_{\overline{B_\rho}(0)}I(u)$. 下证 $c_1<0$. 由 $f>0$，则存在 $v\in H^1(\Omega)$ 使得 $\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x>0$. 于是存在 $\delta_2>0$，使得当 $0<t<\min\left\{\delta_2,\frac{\rho}{\|v\|},\frac{2\int_\Omega fv^+\mathrm{d}x}{\|v\|^2}\right\}$ 时，

$$I(tv)=\frac{t^2}{2}\|v\|^2-\frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |v^+|^{2^*}\mathrm{d}x-t\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x<0$$

因此 $c_1<0$. 取 $\delta_3>0$，使得当 $\|f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta_3$ 时，有 $\frac{1}{2N}S_\mu^{\frac{N}{2}}-C\|f\|_{L^2(\Omega)}>0$. 从而由引理 1 知，$I$ 有一个临界点 u_1 满足 $I(u_1)=c_1<0$. 又因为 $\langle I'(u_1),u_1^-\rangle=-\|u_1^-\|^2-\int_\Omega fu_1^-\mathrm{d}x=0$，而 $u_1^-=\min\{u_1,0\}\geqslant 0$ 和 $f>0$，所以 $u_1^-=0$，因此 $u_1\geqslant 0$. 根据强极大值原理（文献[5]的定理 8.19），u_1 是方程(1)的正解.

相似于文献[6]的引理 2.3，由 $f\geqslant 0$ 可得

$$\sup_{t\geqslant 0}I(tu_\varepsilon)\leqslant\sup_{t\geqslant 0}\left[\frac{t^2}{2}\int_\Omega\left(|\nabla u_\varepsilon|^2-\mu\frac{u_\varepsilon^2}{|x|^2}+\lambda u_\varepsilon^2\right)\mathrm{d}x-\frac{t^{2^*}}{2^*}\int_\Omega |u_\varepsilon|^{2^*}\mathrm{d}x\right]=$$

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\int_{\Omega}(|\nabla u_{\varepsilon}|^{2}-\mu\frac{u_{\varepsilon}^{2}}{|x|^{2}}+\lambda u_{\varepsilon}^{2})\mathrm{d}x}{(\int_{\Omega}|u_{\varepsilon}|^{2^{*}}\mathrm{d}x)^{\frac{2}{2^{*}}}}\right)\leqslant\frac{1}{2N}S_{\mu}^{\frac{N}{2}}-C_{3}\varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}}$$

由 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(tu_{\varepsilon})\to-\infty$ 知，存在 $t_0>0$ 使得 $\|t_0u_{\varepsilon}\|>\rho$ 和 $I(t_0u_{\varepsilon})<0$. 定义

$$c_2=\inf_{h\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}I(h(t))$$

这里 $\Gamma=\{h\in C([0,1],H^1(\Omega)):h(0)=0,h(1)=t_0u_{\varepsilon}\}$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_3,\varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{2\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}}\}>0$，使得当 $\|f\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\delta$ 时，有 $c_2<\sup\limits_{t\geqslant0}I(tu_{\varepsilon})\leqslant\frac{1}{2N}S_{\mu}^{\frac{N}{2}}-C_3\varepsilon^{\frac{\sqrt{\bar{\mu}}}{\sqrt{\bar{\mu}-\mu}}}<\frac{1}{2N}S_{\mu}^{\frac{N}{2}}-C\|f\|_{L^2(\Omega)}^2$. 结合引理2，根据山路引理和引理1知，$I$ 有一个临界点 u_2，且 $I(u_2)=c_2\geqslant\alpha>0$. 类似地，由强极大值原理知，方程(1)存在另一个正解 u_2. 因此，方程(1)有两个正解 u_1,u_2，满足 $I(u_1)<0<I(u_2)$.

参考文献：

[1] WANG Xu-jia. Neumann Problems of Semilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. J Differential Equations, 1991, 93: 283－310.

[2] HAN Pi-gong, LIU Zhao-xia. Positive Solutions for Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent and Hardy Terms with Neumann Boundary Conditions [J]. Nonlinear Anal, 2003, 55: 167－186.

[3] CHABROWSKI J. On a Singular Neumann Problem for Semilinear Elliptic Equations with Critical Sobolev Exponent and Lower Order Terms [J]. J Fixed Point Theory Appl, 2007(2): 333－352.

[4] BREZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents [J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36(4): 437－477.

[5] GILBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2001.

[6] LIU Zhi-yang. Existence of the Positive Solutions for Some Boundary Singularity Elliptic Equation with Critical Hardy-Sobolev Exponent [J]. IERI Procedia, 2012(3): 34－40.

[7] SHANG Yan-ying, TANG Chun-lei. Positive Solutions for Neumann Elliptic Problems Involving Critical Hardy-Sobolev Exponent with Boundary Singularities [J]. Nonlinear Anal, 2009, 70(3): 1302－1320.

[8] 杜其武，唐春雷. 具有加权 Hardy-Sobolev 临界指数的半线性椭圆方程的无穷多个任意小解 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(6)：131－135.

[9] 欧增奇，唐春雷. 一类半线性椭圆方程解的存在性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2007，32(1)：1－5.

Existence of Two Positive Solutions for an Inhomogeneous Neumann Problem Involving Critical Sobolev Exponent with Boundary Singularities

SONG Yuan-yuan, WU Xing-ping, TANG Chun-lei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: The existence of two positive solutions are obtained for a class of inhomogeneous Neumann problem involving critical Sobolev exponent with boundary singularities by using Ekeland variational principle and Mountain Pass lemma.

Key words: boundary singularities; critical Sobolev exponent; inhomogeneous Neumann problem; Ekeland variational principle; Mountain Pass lemma

责任编辑 廖 坤