文章编号:1000－5471(2013)10－0001－04

三阶三点边值问题的两个正解的存在性①

张立新[1]，　孙　博[2]，　张　洪[1]

1. 北京联合大学 基础部，北京 100101；2. 中央财经大学 统计与数学学院，北京 100081

摘要： 考虑三阶三点边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)+a(t)f(t,\ u(t))=0 & t\in(0,\ 1)\\ u(0)=\alpha u(\eta),\ u'(1)=\beta u'(\eta),\ u''(0)=0\end{cases}$$

当非线性项 f 满足一定的增长条件时，利用 Avery-Henderson 不动点定理得到了上述边值问题至少有 2 个正解的存在性结果.

关　键　词： 三阶三点边值问题；不动点定理；正解

中图分类号：O175.8　　　　**文献标志码：A**

三阶微分方程起源于应用数学、物理学等不同的学科领域，有着广泛的应用背景和重要的理论作用. 近年来，许多学者利用 Krasnoselskii 不动点定理、指数不动点理论、Avery-Peterson 不动点定理及单调迭代等方法研究了三阶微分方程的边值问题的 1 个、2 个或 3 个正解的存在性(见文献[1－11]). 在非线性项 f 满足超线性或次线性的条件下，文献[5] 利用指数不动点理论证明了三阶三点边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)+a(t)f(u(t))=0 & t\in(0,1)\\ u(0)=u'(0)=0,\ u'(1)=\alpha u'(\eta)\end{cases}$$

至少存在 2 个正解，其中 $0<\eta<1$ 且 $1<\alpha<\dfrac{1}{\eta}$.

受上述结论的启发，本文考虑下面三阶三点边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)+a(t)f(t,u(t))=0 & t\in(0,1)\\ u(0)=\alpha u(\eta),\ u'(1)=\beta u'(\eta),\ u''(0)=0\end{cases}\tag{1}$$

假设以下条件成立：

(H_1) $0<\eta<1$，$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$；

(H_2) $f\in C([0,1]\times[0,\infty),[0,\infty))$，$a(t)$ 在$[0,1]$上非负连续.

到目前为止，作者尚未看到对边值问题(1)2 个正解的存在性的研究结果. 本文利用 Avery-Henderson 不动点定理建立边值问题(1) 的 2 个正解存在性的充分条件.

1　预备知识

引理 1　设$(1-\alpha)(1-\beta)\neq 0$，则对 $h\in C[0,1]$，边值问题

$$\begin{cases}u'''(t)+h(t)=0 & t\in(0,1)\\ u(0)=\alpha u(\eta),\ u'(1)=\beta u'(\eta),\ u''(0)=0\end{cases}\tag{2}$$

有唯一解 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s$，其中

①　收稿日期：2012－01－08
基金项目：国家自然科学基金数学天元基金资助(11126245)；北京联合大学中青年骨干教师项目资助.
作者简介：张立新(1971－)，女，山东滨州人，副教授，主要从事微分方程边值问题的研究.

$$G(t,s)=\begin{cases}-\frac{1}{2}(t-s)^2+\frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}[1-s-\beta(\eta-s)]-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}(\eta-s)^2 & 0\leqslant s\leqslant \min\{t,\eta\}\\ \frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}[1-s-\beta(\eta-s)]-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}(\eta-s)^2 & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant \eta\leqslant 1\\ -\frac{1}{2}(t-s)^2+\frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1-s) & 0\leqslant \eta\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ \frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1-s) & \max\{t,\eta\}\leqslant s\leqslant 1\end{cases}\tag{3}$$

证 若 $u(t)$ 是边值问题(2) 的解，则有

$$u(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2h(s)\mathrm{d}s+At^2+Bt+C\tag{4}$$

由问题(2) 的边界条件得 $A=0$,

$$B=\frac{1}{1-\beta}\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s-\frac{\beta}{1-\beta}\int_0^\eta(\eta-s)h(s)\mathrm{d}s$$

$$C=\frac{\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha\beta\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\int_0^\eta(\eta-s)h(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\int_0^\eta(\eta-s)^2h(s)\mathrm{d}s$$

代入(4) 式得

$$u(t)=-\frac{1}{2}\int_0^t(t-s)^2h(s)\mathrm{d}s+\frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s-$$
$$\frac{\beta[(1-\alpha)t+\alpha\eta]}{(1-\alpha)(1-\beta)}\int_0^\eta(\eta-s)h(s)\mathrm{d}s-\frac{\alpha}{2(1-\alpha)}\int_0^\eta(\eta-s)^2h(s)\mathrm{d}s$$

因此，边值问题(2) 有唯一解 $u(t)=\int_0^1G(t,s)h(s)\mathrm{d}s$，其中 $G(t,s)$ 由(3) 式给出.

引理 2 如果 $0<\alpha<1$，$0<\beta<1$，$0<\eta<1$，则由(3) 式确定的 $G(t,s)$ 满足

$$G(t,s)\geqslant 0\qquad (t,s)\in[0,1]\times[0,1]$$

证 当 $0\leqslant s\leqslant \min\{t,\eta\}\leqslant 1$ 时,

$$G(t,s)\geqslant -t+s+\frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1-\beta)(1-s)-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\eta-s)=$$
$$-t+s+t(1-s)+\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}(1-s)-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\eta-s)=$$
$$s(1-t)+\frac{\alpha s}{1-\alpha}(1-\eta)\geqslant 0$$

当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant \eta\leqslant 1$ 时,

$$G(t,s)\geqslant \frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1-\beta)(1-s)-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\eta-s)=$$
$$t(1-s)+\frac{\alpha\eta}{1-\alpha}(1-s)-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\eta-s)=$$
$$t(1-s)+\frac{\alpha s}{1-\alpha}(1-\eta)\geqslant 0$$

当 $0\leqslant \eta\leqslant s\leqslant t\leqslant 1$ 时,

$$G(t,s)\geqslant -t+s+\frac{t}{1-\beta}(1-s)+\frac{\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1-s)=$$
$$\frac{\beta(t-s)+s(1-t)}{1-\beta}+\frac{\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1-s)\geqslant 0$$

当 $0\leqslant \max\{t,\eta\}\leqslant s\leqslant 1$ 时，$G(t,s)=\frac{(1-\alpha)t+\alpha\eta}{(1-\alpha)(1-\beta)}(1-s)\geqslant 0$.

引理 3 如果 $h(t)\geqslant 0$，$t\in[0,1]$，则边值问题(2) 的解 $u(t)$ 满足 $u(t)\geqslant 0$，$u'(t)\geqslant 0$，$u''(t)\leqslant 0$，$t\in[0,1]$.

证 由于 $G(t,s)\geqslant 0$ 且 $h(t)\geqslant 0$，所以 $u(t)\geqslant 0$，其中 $(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$，$t\in[0,1]$. 很显然，$u''(t)=-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\leqslant 0$，$t\in[0,1]$. 而

$$u'(t)=-\int_0^t(t-s)h(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{1-\beta}\int_0^1(1-s)h(s)\mathrm{d}s-\frac{\beta}{1-\beta}\int_0^\eta(\eta-s)h(s)\mathrm{d}s$$

分 $t\leqslant\eta$ 和 $t\geqslant\eta$ 两种情况可以证明 $u'(t)\geqslant 0(t\in[0,1])$.

2　主要结论

令 $X=C[0,1]$，在 X 中定义范数 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}u(t)$，则 X 为 Banach 空间. 在 X 中定义锥 P：

$$P=\{u\in X：u(t)\text{ 在}[0,1]\text{上是非负、非减和凹的}\}$$

任取 $r\in(\eta,1)$，在锥 P 上定义连续非负泛函 γ，θ 和 α 分别为：

$$\gamma(u)=\min_{\eta\leqslant t\leqslant r}u(t)=u(\eta)\qquad \theta(u)=\max_{0\leqslant t\leqslant\eta}u(t)=u(\eta)\qquad \alpha(u)=\max_{0\leqslant t\leqslant r}u(t)=u(r)$$

对 $u\in P$，有 $\gamma(u)=\theta(u)\leqslant\alpha(u)$，$\|u\|\leqslant\frac{1}{\eta}\gamma(u)$. 对 $\mu\in(0,1]$，有 $\theta(\mu u)\leqslant\mu\theta(u)$.

为方便起见，记

$$L=\int_\eta^1 G(\eta,s)a(s)\mathrm{d}s\qquad M=\int_0^1 G(\eta,s)a(s)\mathrm{d}s\qquad N=\int_0^r G(r,s)a(s)\mathrm{d}s$$

定理 1　设条件(H_1)和(H_2)成立，存在正数 a，b，c 满足 $a<b<\eta c$ 且 $Ma<Nb$，使得

(A_1) $f(t,u)>\frac{c}{L}$，$\eta\leqslant t\leqslant 1$，$c\leqslant u\leqslant\frac{c}{\eta}$；

(A_2) $f(t,u)<\frac{b}{M}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$0\leqslant u\leqslant\frac{b}{\eta}$；

(A_3) $f(t,u)>\frac{a}{N}$，$0\leqslant t\leqslant r$，$0\leqslant u\leqslant a$.

则边值问题(1)至少有 2 个正解 u_1，u_2，满足

$$a<\max_{0\leqslant t\leqslant r}u_1(t)=u_1(r)\qquad u_1(\eta)=\max_{0\leqslant t\leqslant\eta}u_1(t)<b$$

和

$$b<\max_{0\leqslant t\leqslant\eta}u_2(t)=u_2(\eta)\qquad u_2(\eta)=\min_{\eta\leqslant t\leqslant r}u_2(t)<c$$

证　对 $u\in P$，定义全连续算子 $T：P\longrightarrow X$：

$$(Tu)(t)=\int_0^1 G(t,s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$$

边值问题(1)有解 $u=u(t)$ 当且仅当算子方程 $u=Tu$ 有不动点. 下面验证算子 T 满足文献[12]中 Avery-Henderson 不动点定理的条件，从而可得到 T 至少有 2 个不动点.

先证 $T：\overline{P(\gamma,c)}\longrightarrow P$. 设 $u\in P(\gamma,c)$，由引理 3 知 $u\in P$，故 $T：\overline{P(\gamma,c)}\longrightarrow P$.

其次分 3 步证明 T 满足 Avery-Henderson 不动点定理的条件.

步骤 1　取 $u\in\partial P(\gamma,c)$，则 $\gamma(u)=c$，从而 $u(t)\geqslant c$，$\eta\leqslant t\leqslant r$. 又因 $\|u\|\leqslant\frac{1}{\eta}\gamma(u)$，于是有 $c\leqslant u(t)\leqslant\frac{c}{\eta}$，$\eta\leqslant t\leqslant 1$. 故由条件($A_1$)，得

$$\gamma(Tu)=(Tu)(\eta)=\int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant$$
$$\int_\eta^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s>\frac{c}{L}\int_\eta^1 G(\eta,s)a(s)\mathrm{d}s=\frac{c}{L}\cdot L=c$$

步骤 2　取 $u\in\partial P(\theta,b)$，则 $\theta(u)=u(\eta)=b$，从而 $0\leqslant u(t)\leqslant b$，$0\leqslant t\leqslant\eta$. 又因 $u\in P$，有 $b\leqslant u(t)\leqslant\|u\|=u(1)$，$\eta\leqslant t\leqslant 1$. 由 $\|u\|\leqslant\frac{1}{\eta}\gamma(u)=\frac{1}{\eta}\theta(u)=\frac{b}{\eta}$，得 $0\leqslant u(t)\leqslant\frac{b}{\eta}$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 由条件($A_2$)，得

$$\theta(Tu)=(Tu)(\eta)=\int_0^1 G(\eta,s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s<$$
$$\frac{b}{M}\int_0^1 G(\eta,s)a(s)\mathrm{d}s=\frac{b}{M}\cdot M=b$$

步骤 3　取 $u=\frac{a}{3}$，$0\leqslant t\leqslant 1$，则 $\alpha(u)=\frac{a}{3}<a$，所以 $P(\alpha,a)\neq\varnothing$. 对 $u\in\partial P(\alpha,a)$，则 $\alpha(u)=u(r)$

$=a$，此时有 $0 \leqslant u(t) \leqslant a$，$0 \leqslant t \leqslant r$. 故由条件$(A_3)$，得

$$\alpha(Tu) = (Tu)(r) = \int_0^1 G(r, s)a(s)f(s, u(s))\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_0^r G(r, s)a(s)f(s, u(s))\mathrm{d}s > \frac{a}{N}\int_0^r G(r, s)a(s)\mathrm{d}s = \frac{a}{N} \cdot N = a$$

因此边值问题(1) 至少有 2 个正解 u_1, u_2，使得

$$a < \max_{0 \leqslant t \leqslant r} u_1(t) = u_1(r) \qquad u_1(\eta) = \max_{0 \leqslant t \leqslant \eta} u_1(t) < b$$

和

$$b < \max_{0 \leqslant t \leqslant \eta} u_2(t) = u_2(\eta) \qquad u_2(\eta) = \min_{\eta \leqslant t \leqslant r} u_2(t) < c$$

参考文献：

[1] SUN Yong-ping. Positive Solutions for Third-Order Three-Point Nonhomogeneous Boundary Value Problems [J]. Appl Math Lett, 2009, 22(1): 45－51.

[2] SUN Yong-ping. Existence of Triple Positive Solutions for Third-Order Three-Point Boundary Value Problem [J]. J Comput Math Appl, 2008, 222(1): 194－201.

[3] SUN Yong-ping. Positive Solutions of Singular Third-Order Three Point Boundary Value Problem [J]. J Math Anal Appl, 2005, 306(2): 589－603.

[4] GUO Li-jun, SUN Jian-ping, ZHAO Ya-hong. Existence of Positive Solutions for Third-Order Three-Point Boundary Value Problems [J]. Nonl Anal, 2008, 68(8): 3151－3158.

[5] 孙建平，彭俊国，郭丽君. 非线性三阶三点边值问题的正解 [J]. 兰州理工大学学报，2009，35(1)：139－142.

[6] 田元生，刘春根. 三阶 p-Laplacian 方程三点奇异边值问题正解的存在性 [J]. 工程数学学报，2009，26(3)：519－527.

[7] DU Zeng-ji, GE Wei-gao, LIN Xiao-jie. Existence of Solutions for a Class of Third-Order Nonlinear Boundary Value Problems [J]. J Math Anal Appl, 2004, 294(1): 104－112.

[8] 孙 博. 一类三阶两点边值问题单调迭代正解的存在性 [J]. 工程数学学报，2009，26(6)：1027－1032.

[9] 陈顺清. 三阶边值问题两个正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2004，29(5)：803－806.

[10] 张立新. 三阶边值问题的 3 个正解的存在性 [J]. 四川师范大学学报：自然科学版，2011，34(4)：466－470.

[11] ANDERSON D R. Green's Function for a Third-Order Generalized Right Focal Problem [J]. J Math Anal Appl, 2003, 288(1): 1－4.

[12] AVERY R I, HENDERSON J. Two Positive Fixed Points of Nonlinear Operators on Ordered Banach Spaces [J]. Comm Appl Nonlinear Anal, 2001(8): 27－36.

On The Existence of Two Positive Solutions for Third-Order Three-Point Boundary Value Problem

ZHANG Li-xin[1], SUN Bo[2], ZHANG Hong[1]

1. *Department of Basic Courses, Beijing Union University, Beijing 100101, China;*

2. *School of Statistics and Mathematics, Central University of Finance and Economics, Beijing 100081, China*

Abstract: This paper deals with the third-order three-point boundary value problem,

$$\begin{cases} u'''(t) + a(t)f(t, u(t)) = 0 & t \in (0, 1) \\ u(0) = \alpha u(\eta), \ u'(1) = \beta u'(\eta), \ u''(0) = 0 \end{cases}$$

and the existence of at least two positive solutions for the above problem has been established by using Avery-Henderson fixed point theorem, when f satisfies some growth conditions.

Key words: third-order three-point boundary value problem; fixed point theorem; positive solution

责任编辑 廖 坤