第 38 卷　第 10 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2013 年 10 月
Vol. 38　No. 10　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Oct. 2013

文章编号:1000-5471(2013)10-0001-04

非退化中心问题的构造性方法①

桑　波

聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059

摘要: 在中心焦点判定问题中,时间可逆性是一个非常有用的概念. 给出了时间可逆系统的一个性质,利用此性质可以优化时间可逆条件推导的算法. 对一类解析微分系统,给出了系统具有非退化中心的充要条件,利用此结论构造了三次微分系统的一些非平凡中心条件.

关　键　词: 三次系统;中心焦点问题;时间可逆性;特征集

中图分类号: O175.12　　**文献标志码:** A

中心焦点问题是常微分方程定性理论中的经典课题,该课题与希尔伯特第十六问题的第二部分紧密相关. Bautin 完整解决了二次系统的中心焦点判定问题,对于三次及三次以上的系统,还没有彻底的结论. 形式级数法和后继函数法是计算焦点量的两类经典方法[1-2]. 近 30 年来,奇点量方法[3]、复算法[4]、标准形算法[5]、摄动算法[6]、李框架法[7] 以及逆积分因子法[8] 相继出现. 无论何种方法,都会导致复杂的计算,因此,如何在已有方法的基础上进一步提升效率成为解决问题的关键.

一般来讲,中心焦点问题的最终解决依赖于焦点量的计算,但当计算量过大时,有必要用间接方法推导中心条件. 文献[3] 定义了基本李不变量,给出了广义对称原理. 文献[9] 以 Gröbner 基为工具,寻找双线性变换,将一类多项式系统化为时间可逆系统.

考虑线性部分为$(y, -x)$的实解析微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+P(x, y)\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+Q(x, y)\end{cases}\tag{1}$$

其中 $P(x, y)=\sum\limits_{i=2}^{\infty}P_i(x, y)$, $Q(x, y)=\sum\limits_{i=2}^{\infty}Q_i(x, y)$,且 P_i,Q_i 都是 i 次齐次多项式.

定义 1　如果系统(1) 的向量场

$$(y+P(x, y))\frac{\partial}{\partial x}+(-x+Q(x, y))\frac{\partial}{\partial y}$$

关于过原点的一条直线对称,则称系统(1) 关于该直线时间可逆.

由定义 1,系统(1) 关于直线 $ax+by=0$ 时间可逆的充要条件是存在非退化线性变换 S: $\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$,使得 $S(x, y)$ 为(x, y) 关于直线 $ax+by=0$ 的对称点,且

$$S(P(x, y), Q(x, y))\equiv-(P(S(x, y)), Q(S(x, y)))\tag{2}$$

其中 $S(x, y)=\left(x-2a\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}, y-2b\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}\right)$.

---

① 收稿日期:2012-05-07
基金项目:国家自然科学基金数学天元基金资助项目(11226041).
作者简介:桑　波(1976-),男,山东肥城人,博士,副教授,主要从事常微分方程定性理论和符号计算的研究.

文献[10]首次应用吴方法[11]构造Kukles系统的新的非平凡条件. 文献[9]对系统(1)提出了3种中心类型：时间可逆系统、Darboux可积系统和广义对称系统，并猜想它们是非退化中心的所有类型. 对于系统(1)，文献[12]利用吴方法给出了时间可逆代数条件推导的算法，不过该算法在处理高次多项式系统时，效率会明显降低，因此需要降低算法的复杂度. 文献[13]证明了系统(1)以原点为中心的充要条件是系统ϕ-时间可逆，其中ϕ是对合变换(微分同胚且满足$\phi\circ\phi=\mathrm{id}$). 然而对给定的具有中心的系统(1)，很难找到相应的对合变换，即使能找到，其形式通常也是非初等的.

对于线性部分为$(y,-x)$的实解析微分系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty}p_s(x,y)X_s(x,y)\equiv y+P(x,y)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty}p_s(x,y)Y_s(x,y)\equiv -x+Q(x,y)\end{cases}\tag{3}$$

其中$P(x,y)$和$Q(x,y)$的最低次项的次数至少是二次，我们有下面的定理：

定理1 如果向量场

$$(y+X_s(x,y))\frac{\partial}{\partial x}+(-x+Y_s(x,y))\frac{\partial}{\partial y}\qquad s=1,2,\cdots$$

都关于给定的直线$ax+by=0$对称，则系统(3)以原点为中心.

证 由已知条件及(2)式，得

$$S(X_s(x,y),Y_s(x,y))\equiv-(X_s(S(x,y)),Y_s(S(x,y)))$$

考虑到S为线性变换，对任意$s\in\mathbb{N}$，有

$$S(p_s(x,y)X_s(x,y),p_s(x,y)Y_s(x,y))\equiv-(p_s(x,y)X_s(S(x,y)),p_s(x,y)Y_s(S(x,y)))$$

从而

$$S(P(x,y),Q(x,y))\equiv-(P(S(x,y)),Q(S(x,y)))$$

即系统(3)关于直线$ax+by=0$时间可逆. 由Poincaré对称原理，系统(3)以原点为中心.

由定理1知，关于同一条直线时间可逆的系统具有可加性，这一特性可以优化文献[10]的时间可逆代数条件的推导算法.

为了批量地构造具有中心的多项式微分系统，我们先引进一个定理：

定理2 系统(1)以原点为中心的充要条件是存在近恒同解析变换

$$\phi:(x,y)\longmapsto(x+\xi(x,y),y+\eta(x,y))\qquad(x,y)\in U$$

其中U是以原点为中心的某邻域，使得系统(1)变为时间可逆系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+P_1(x,y)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+Q_1(x,y)\end{cases}\tag{4}$$

证 *必要性* 假设系统(1)以原点为中心，由Birkhoff标准形理论，存在近恒同解析变换

$$\phi:(x,y)\longmapsto(x+\xi(x,y),y+\eta(x,y))\qquad(x,y)\in U$$

其中U为原点的某邻域，使得系统(1)变为标准形

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y-y\psi(x^2+y^2)\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+x\psi(x^2+y^2)\end{cases}\tag{5}$$

而系统(5)关于x轴时间可逆.

充分性 由对称原理，系统(4)以原点为中心. 而系统(1)和系统(4)在原点附近拓扑等价，因此系统(1)以原点为中心.

对于给定的近恒同变换，利用定理2可以构造中心条件. 我们称这类方法为中心条件推导的间接方法. 下面我们以三次系统为例，构造若干非平凡中心条件. 值得注意的是，并不是每个近恒同变换都可构造出非平凡的中心条件.

命题 1　系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+(2-b_{3,1}+2b_{3,2})x^2+2xy+\dfrac{3}{2}y^2+(2-b_{3,1}+2b_{3,2})x^3+\\ \qquad (3-b_{3,1}+2b_{3,2})x^2y+\dfrac{3}{2}xy^2+\dfrac{1}{2}y^3\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+(2+2b_{3,2})xy-y^2+b_{3,0}x^3+b_{3,1}x^2y+b_{3,2}xy^2-\dfrac{1}{2}y^3\end{cases}\tag{6}$$

以原点为中心.

证　通过近恒同变换 $x\longmapsto x+xy$，$y\longmapsto y-xy$，系统(6) 变为关于 y 轴时间可逆的系统. 根据定理 2，系统(6) 以原点为中心.

命题 2　系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+a_{2,0}x^2+6xy+a_{2,2}y^2+4a_{2,0}x^3+8yx^2+4a_{2,2}y^2x\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x-4x^2+b_{2,1}xy+2y^2+b_{3,0}x^3+(2a_{2,0}+2b_{2,1})x^2y+b_{3,2}xy^2+2a_{2,2}y^3\end{cases}\tag{7}$$

以原点为中心.

证　通过近恒同变换 $x\longmapsto \dfrac{x}{1-2x-y}$，$y\longmapsto \dfrac{y}{1-2x-y}$，系统(7) 变为关于 y 轴时间可逆的系统. 根据定理 2，系统(7) 以原点为中心.

命题 3　系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+a_{2,0}x^2+a_{2,1}xy+(2+b_{2,0})y^2+(2+2a_{2,0}+b_{2,0}-b_{3,3})x^3+\\ \qquad (-3+a_{3,2}+a_{2,1}-b_{2,0})x^2y+a_{3,2}xy^2+(2+a_{2,0}+b_{2,0}-b_{3,3})y^3\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+b_{2,0}x^2+(-3+a_{2,1})xy+(1+a_{2,0})y^2+(-1-a_{2,0}+b_{3,3})x^3+\\ \qquad (1+a_{2,0}+a_{2,1}-a_{3,2}+2b_{2,0})x^2y+(-1+a_{2,0}+2a_{2,1}-a_{3,2}+b_{2,0})xy^2+b_{3,3}y^3\end{cases}\tag{8}$$

以原点为中心 .

证　通过近恒同变换 $x\longmapsto \dfrac{x}{1-2x+y}$，$y\longmapsto \dfrac{y}{1-2x+y}$，系统(8) 变为关于直线 $x+y=0$ 时间可逆的系统. 根据定理 2，系统(8) 以原点为中心.

命题 4　系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+(-b_{3,3}+1+b_{3,0})x^2+(-3+b_{2,1})xy+(-3+b_{2,1}-b_{3,1}+b_{3,2})y^2+\\ \qquad (1-b_{2,1}-2b_{3,0}+b_{3,1}-b_{3,2}+b_{3,3})x^3+(4-3b_{2,1}-b_{3,2}+b_{3,3}-b_{3,0})x^2y+\\ \qquad (5-3b_{2,1}+b_{3,1}-2b_{3,2}+b_{3,3}-b_{3,0})xy^2+(2-b_{3,0}+b_{3,1}-b_{3,2}-b_{2,1})y^3\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x+(-1+b_{2,1}-b_{3,1}+b_{3,2})x^2+b_{2,1}xy+\\ \qquad (b_{3,0}-b_{3,3})y^2+b_{3,0}x^3+b_{3,1}x^2y+b_{3,2}xy^2+b_{3,3}y^3\end{cases}\tag{9}$$

以原点为中心 .

证　通过近恒同变换 $x\longmapsto \dfrac{x-xy}{1+x}$，$y\longmapsto y$，系统(9) 变为关于直线 $x+y=0$ 时间可逆的系统. 根据定理 2，系统(9) 以原点为中心.

上述几类具有中心的三次系统是在计算机代数软件 Maple 的帮助下发现的. 在构造过程中需要求解复杂的多项式方程组，我们使用了软件包 Wsolve. 在构造过程中，我们得到更多的具有中心的三次系统. 对于四次及四次以上多项式系统，利用近恒同变换也可构造出大量的以原点为中心的多项式系统. 我们构造的具有中心的系统都不是时间可逆系统或 Hamilton 系统，因而是非平凡的. 这些系统的等时中心判定问题[14] 是值得关注的.

参考文献:

[1] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，等. 微分方程定性理论 [M]. 北京：科学出版社，1985.

[2] WANG Dong-ming. Mechanical Manipulation for a Class of Differential Systems [J]. Journal of Symbolic Computation，1991，12(2)：233－254.

[3] 刘一戎，李继彬. 论复自治微分系统的奇点量 [J]. 中国科学：A 辑，1989，32(3)：245－255.

[4] 王　铎，毛　锐. 计算 Lyapunov 量的复算法 [J]. 自然科学进展，1995，5(6)：754－757.

[5] WANG Duo. A Recursive Formula and Its Application To Computations of Normal Forms and Focal Values [C]//LIAO Shan-tao，YE Yan-qian. Dynamical Systems. Singapore：World Sci Publ，1993：238－247.

[6] YU Pei. Computation of Normal Forms Via a Perturbation Technique [J]. Journal of Sound and Vib，1998，211(1)：19－38.

[7] ALGABA A，FREIRE E，GAMERO E. Isochronicity via Normal Form [J]. Qual Theory Dyn Syst，2000，1(2)：133－156.

[8] GARCÍA I A，GRAU M. A Survey on the Inverse Integrating Factor [J]. Qual Theory Dyn Syst，2010，9(1－2)：115－166.

[9] LLOYD N G，PEARSON J M. Symmetry in Planar Dynamical Systems [J]. Journal of Symbolic Computation，2002，33(3)：357－366.

[10] JIN Xiao-fan，WANG Dong-ming. On the Conditions of Kukles for the Existence of a Centre [J]. Bulletin of London Mathematical Society，1990，22(1)：1－4.

[11] 吴文俊. 数学机械化 [M]. 北京：科学出版社，2003.

[12] 桑　波，朱思铭. 焦点量算法与中心条件推导 [J]. 数学物理学报，2008，28(1)：164－173.

[13] TEIXEIRA M A，YANG Jia-zhong. The Center-Foucs Problem and Reversibility [J]. Journal of Differential Equations，2001，174(1)：237－251.

[14] 桑　波，刘文健，朱思铭. 一类时间可逆四次系统的等时中心 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2011，36(4)：59－63.

On Constructive Methods in Nondegenerate Center Problems

SANG Bo

School of Mathematical Sciences，Liaocheng University，Liaocheng Shandong 252059，China

Abstract：Time-Reversibility is a very useful concept for the center-focus problem. In this paper，a property of time-reversible systems has been introduced，which can be used to optimize the algorthm for deducing time-reversibility conditions. For a class of analytic differential systems，necessary and sufficient conditions ensuring the origin to be centered have been obtained. By the result，several non-trivial center conditions have been found for cubic systems.

Key words：cubic systems；center-focus problem；time-reversibility；characteristic-sets

责任编辑　廖　坤