文章编号:1000-5471(2013)10-0001-04

关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ ①

郭凤明，罗　明

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：运用递归数列的方法，证明了不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$$

无正整数解.

关　键　词：不定方程；整数解；递归数列

中图分类号：O156.2　　**文献标志码**：A

当$(m, n)=1$，$m, n \in \mathbb{N}_+$ 时，对形如

$$nx(x+1)(x+2)(x+3)=my(y+1)(y+2)(y+3)$$

的不定方程已有不少研究成果[1-8]. 在本文中，我们将运用递归数列的方法证明：当$(m, n)=(1, 10)$时，不定方程

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

无正整数解.

先将方程(1)化为

$$(x^2+3x+1)^2-10(y^2+3y+1)^2=-9 \tag{2}$$

易知方程 $x^2-10y^2=-9$ 的全部整数解[9]由以下 4 个结合类给出：

$$x_n+y_n\sqrt{10}=\pm(1+\sqrt{10})(u_n+v_n\sqrt{10})=\pm(1+\sqrt{10})(19+6\sqrt{10})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{10}=\pm(-1+\sqrt{10})(u_n+v_n\sqrt{10})=\pm(-1+\sqrt{10})(19+6\sqrt{10})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$x'_n+y'_n\sqrt{10}=\pm(9+3\sqrt{10})(u_n+v_n\sqrt{10})=\pm(9+3\sqrt{10})(19+6\sqrt{10})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

$$\bar{x}'_n+\bar{y}'_n\sqrt{10}=\pm(-9+3\sqrt{10})(u_n+v_n\sqrt{10})=\pm(-9+3\sqrt{10})(19+6\sqrt{10})^n \qquad n\in\mathbb{Z}$$

其中 $1+\sqrt{10}$，$9+3\sqrt{10}$ 是 $x^2-10y^2=-9$ 的相应结合类的基本解，$19+6\sqrt{10}$ 是 Pell 方程 $u^2-10v^2=1$ 的基本解. 从方程(2)可知 $3\nmid(x^2+3x+1)$，从而舍去后面两个结合类.

于是方程(2)的解应满足

$$(2x+3)^2=4x_n+5 \tag{3}$$

或

$$(2x+3)^2=4\bar{x}_n+5 \tag{4}$$

显然必须满足 $x_n\geqslant-1$，$\bar{x}_n\geqslant-1$. 从而(3)，(4)式中的 x_n，$\bar{x}_n$ 只需分别取自：

$$x_n+y_n\sqrt{10}=(1+\sqrt{10})(u_n+v_n\sqrt{10})=(1+\sqrt{10})(19+6\sqrt{10})^n \qquad n\geqslant 0$$

① 收稿日期：2012-10-11

作者简介：郭凤明(1989-)，女，四川泸州人，硕士研究生，主要从事代数数论的研究.

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{10}=(-1+\sqrt{10})(u_n+v_n\sqrt{10})=(-1+\sqrt{10})(19+6\sqrt{10})^n \qquad n\geqslant 0$$

不难推出下列关系式:

$$x_{n+1}=38x_n-x_{n-1} \qquad x_0=1,\ x_1=79 \tag{5}$$

$$\bar{x}_{n+1}=38\bar{x}_n-\bar{x}_{n-1} \qquad \bar{x}_0=-1,\ \bar{x}_1=41 \tag{6}$$

$$u_{n+1}=38u_n-u_{n-1} \qquad u_0=1,\ u_1=19 \tag{7}$$

$$v_{n+1}=38v_n-v_{n-1} \qquad v_0=0,\ v_1=6 \tag{8}$$

$$u_{2n}=2u_n^2-1 \qquad v_{2n}=2u_nv_n \tag{9}$$

$$x_n=u_n+10v_n \qquad \bar{x}_n=-u_n+10v_n \tag{10}$$

$$u_{n+2h}\equiv-u_n \pmod{u_h} \qquad v_{n+2h}\equiv-v_n \pmod{u_h} \tag{11}$$

$$x_{n+2h}\equiv-x_n \pmod{u_h} \qquad \bar{x}_{n+2h}\equiv-\bar{x}_n \pmod{u_h} \tag{12}$$

下面将证明(3)式仅当 $n=0$ 时成立,(4)式仅当 $n=0,1,2$ 时成立. 由此求得方程

$$(x^2+3x+1)^2-10y^2=-9$$

的全部整数解,进而求得方程(1)的全部正整数解.

1 $(2x+3)^2=4x_n+5$ 的解

本节将考察(3)式的解,即 n 取何值时 $4x_n+5$ 为完全平方数.

引理 1 设 $2\mid n$,$n>0$,则 $\left(\frac{\pm 40v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_n\pm 8v_n}{37}\right)$.

证 由(7)式知 $2\nmid u_n$,所以有 $u_{2n}\equiv 2u_n^2-1\equiv 1 \pmod 8$. 因为 $2\mid n$,有 $u_n\equiv 1 \pmod 4$,$8v_n\pm u_n\equiv\pm 1 \pmod 8$. 从而有

$$\left(\frac{\pm 40v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 80u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{40v_n\pm 5u_n}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{8v_n\pm u_n}\right)=$$

$$\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{10v_n^2+u_n^2}{8v_n\pm u_n}\right)=\left(\frac{54}{8v_n\pm u_n}\right)=\left(\frac{2}{8v_n\pm u_n}\right)\left(\frac{37}{8v_n\pm u_n}\right)=\left(\frac{u_n\pm 8v_n}{37}\right)$$

引理 2 若(3)式成立,则必须有 $n\equiv 0 \pmod{180}$.

证 仿照文献[7]的对序列 $\{4x_n+5\}$ 取模的方法证明. 取 mod 1 481,排除 $n\equiv 1,3 \pmod 5$,此时 $4x_n+5\equiv 321,1\ 174 \pmod{1\ 481}$,剩 $n\equiv 0,2,4 \pmod 5$. 为了节省篇幅,下面只给出每次取模所用的素数以及剩余的 n 的情况. 取 mod 281,剩 $n\equiv 0,4,5 \pmod{10}$;取 mod 41 及 mod 59,剩 $n\equiv 0,10,14 \pmod{20}$;取 mod 179 及 mod 419,剩 $n\equiv 0,30 \pmod{60}$;取 mod 1 259,剩 $n\equiv 0,90 \pmod{180}$. 对 $n\equiv 90 \pmod{180}$,令 $n=180t+90$. 若 $2\mid t$,则 $n\equiv 18 \pmod{72}$;若 $2\nmid t$,则 $n\equiv 54 \pmod{72}$. 取 mod 647,排除 $n\equiv 18,54 \pmod{72}$,剩余 $n\equiv 0 \pmod{180}$.

引理 3 设 $n\equiv 0 \pmod{180}$ 且 $n>0$,则(3)式不成立.

证 令 $n=2\cdot k\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^t$,其中 $t\geqslant 1$,$2\nmid k$. 对 $\{u_n\pm 8v_n\}$ 取 mod 37,所得的两个剩余序列周期均为 6. 对 $\{2^t\}$ 取 mod 6 的剩余序列周期为 2. 对 k 分两种情况讨论:

1) 当 $k\equiv 1 \pmod 4$ 时,若 $t\equiv 0 \pmod 2$,令 $m=5\cdot 2^t$;若 $t\equiv 1 \pmod 2$,令 $m=2^t$. 此时 $m\equiv 2 \pmod 6$,$u_m+8v_m\equiv 29 \pmod{37}$. 从而对所有 m,均有 $\left(\frac{u_m+8v_m}{37}\right)=-1$.

于是,由(10),(12)式及引理 1,有 $4x_n+5\equiv 4x_{2m}+5\equiv 40v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$,得

$$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{40v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m+8v_m}{37}\right)=-1$$

从而 $4x_n+5$ 为非平方数.

2) 当 $k\equiv -1 \pmod 4$ 时,若 $t\equiv 0 \pmod 2$,令 $m=2^t$;若 $t\equiv 1 \pmod 2$,令 $m=5\cdot 2^t$. 此时 $m\equiv 4 \pmod 6$,$u_m-8v_m\equiv 29 \pmod{37}$. 对所有 m,均有 $\left(\frac{u_m-8v_m}{37}\right)=-1$. 同理可得

$$4x_n+5\equiv -40v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$$

得$\left(\frac{4x_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{u_m-8v_m}{37}\right)=-1$. 从而 $4x_n+5$ 为非平方数.

2　$(2x+3)^2=4\bar{x}_n+5$ 的解

引理 4　若(4) 式成立，则必须有 $n\equiv 0,1,2 \pmod{180}$.

证　取 mod 1 481，剩 $n\equiv 0,1,2,4 \pmod 5$；取 mod 281，剩 $n\equiv 0,1,2,4,5,7 \pmod{10}$；取 mod 41 及 mod 59，剩 $n\equiv 0,1,2,10 \pmod{20}$；取 mod 419，mod 7 019 及 mod 179，剩 $n\equiv 0,1,2,30 \pmod{60}$；取 mod 1 259，剩 $n\equiv 0,1,2,62,90 \pmod{180}$. 下面用计算排除 $n\equiv 62,90 \pmod{180}$. 当 $n\equiv 62 \pmod{180}$ 时，$n\equiv 26 \pmod{36}$. 取 mod 335 809，排除 $n\equiv 26 \pmod{36}$. 当 $n\equiv 90 \pmod{180}$ 时，令 $n=180t+90$. 若$2\mid t$，则 $n\equiv 18 \pmod{72}$；若 $2\nmid t$，则 $n\equiv 54 \pmod{72}$. 取 mod 503，排除 $n\equiv 18,54 \pmod{72}$，故(4) 式不成立.

引理 5　设 $n\equiv 0,1,2 \pmod{180}$，$n>2$，则(4) 式不成立.

证　1) 当 $n\equiv 0 \pmod{180}$ 时，证明过程与引理 3 的一致，这里不再证明.

2) 当 $n\equiv 1 \pmod{180}$ 时，令 $n=1+2\cdot k\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^t$，其中 $t\geqslant 1$，$2\nmid k$. 对$\{u_m\}$ 取 mod 53，剩余序列周期为 13. 而对$\{2^t\}$ 取 mod 13 的剩余序列周期为 12.

当 $t\equiv 0,1,2,4,6,7,8,10 \pmod{12}$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 3,5,9,11 \pmod{12}$ 时，令 $m=5\cdot 2^t$.

由(12) 式，有 $4\bar{x}_n+5\equiv -4\bar{x}_1+5\equiv -159 \pmod{u_m}$. 因 $2\mid m$，则$\left(\frac{-1}{u_m}\right)=1$，$\left(\frac{3}{u_m}\right)=1$. 有

$$\left(\frac{4\bar{x}_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-159}{u_m}\right)=\left(\frac{53}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{53}\right)$$

当$t(\geqslant 1)=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 \pmod{12}$时，$m=1,2,4,1,3,4,12,11,9,12,10,9 \pmod{13}$，此时 $u_m=19,32,33,19,31,33,19,32,33,19,31,33 \pmod{53}$，对所有 m 均有$\left(\frac{u_m}{53}\right)=-1$，从而$\left(\frac{4\bar{x}_n+5}{u_m}\right)=-1$，故(4) 式不成立.

3) 当 $n\equiv 2 \pmod{180}$ 时，令 $n=2+2\cdot k\cdot 3^2\cdot 5\cdot 2^t$，其中 $t\geqslant 1$，$2\nmid k$. 对$\{u_m\}$ 取 mod 2 077，剩余序列周期为 165. 而对$\{2^t\}$ 取 mod 165 的剩余序列周期为 20.

当 $t\equiv 1,4,8,9,10,12,13,15,16,17 \pmod{20}$ 时，令 $m=2^t$；当 $t\equiv 0,2,3,5,6,7,11,14,19 \pmod{20}$ 时，令 $m=3\cdot 5\cdot 2^t$；当 $t\equiv 18 \pmod{20}$ 时，令 $m=3^2\cdot 2^t$.

由(12) 式，有 $4\bar{x}_n+5\equiv -4\bar{x}_2+5\equiv -6\,231 \pmod{u_m}$. 因 $2\mid m$，则$\left(\frac{-1}{u_m}\right)=1$，$\left(\frac{3}{u_m}\right)=1$. 有

$$\left(\frac{4\bar{x}_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-6\,231}{u_m}\right)=\left(\frac{2\,077}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{2\,077}\right)$$

当 $t(\geqslant 1)=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19 \pmod{20}$ 时，$m=15,2,60,75,16,15,135,105,91,17,34,30,136,107,75,98,31,62,126,90 \pmod{165}$，此时 $u_m=1\,985,721,280,1\,458,1\,352,1\,985,311,280,1\,383,1\,620,220,311,980,1\,651,1\,458,823,453,1\,248,1\,218,1\,458 \pmod{2\,077}$，对所有 m 均有$\left(\frac{u_m}{2\,077}\right)=-1$，从而$\left(\frac{4\bar{x}_n+5}{u_m}\right)=-1$，故(4) 式不成立.

现给出本文的主要结果：

定理 1　不定方程

$$(x^2+3x+1)^2-10y^2=-9 \tag{13}$$

的全部整数解是

$(x,\pm y)=(0,1)$，$(-3,1)$，$(-1,1)$，$(-2,1)$，$(5,13)$，$(-8,13)$，$(38,493)$，$(-41,493)$

证　由引理 2 及引理 3 知，要(3) 式成立，则必须 $n=0$，此时 $x=0,-3$. 这就给出了方程(13) 的前 2 组解.

由引理 4 及引理 5 知，要(4) 式成立，则必须 $n=0,1,2$，此时 $x=-1,-2,5,-8,38,-41$. 这就给

出了方程(13)的后 6 组解. 证毕

推论 1 不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

证 要让方程(1)有正整数解,则由方程(2)及定理 1 知,应有 $y^2+3y+1=\pm 3,\pm 493$. 但这 4 个方程都无正整数解. 从而方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$ 无正整数解.

参考文献:

[1] COHN J E. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. Pacific J Math, 1971, 37: 240-331.

[2] PONNUDURAI T. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. J London Math Soc, 1975, 10: 232-240.

[3] 宣体佐. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 北京师范大学学报:自然科学版, 1982(2): 27-34.

[4] 罗 明. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 1991, 8(1): 1-8.

[5] LUO Ming. On The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. Indian J Pure Appl Math, 2001(1): 3-7.

[6] 程 遥, 马玉林. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 重庆师范大学学报:自然科学版, 2007, 24(3): 27-30.

[7] 罗 明, 朱德辉, 马芙蓉. 关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2009, 34(5): 16-21.

[8] 段辉明, 杨春德. 关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$ [J]. 四川师范大学学报:自然科学版, 2009, 32(1): 60-63.

[9] 柯 召, 孙 琦. 谈谈不定方程 [M]. 上海:哈尔滨工业大学出版社, 1980: 26-27.

On Diophantine Equation of $x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$

GUO Feng-ming, LUO Ming

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, with the method of recurrence sequences, the author has shown that the Diophantine equation

$$x(x+1)(x+2)(x+3)=10y(y+1)(y+2)(y+3)$$

has no positive interger solution.

Key words: diophantine equation; interger solution; recurrence sequence

责任编辑 廖 坤