文章编号:1000-5471(2013)10-0001-04

半群$\mathscr{PO}_n(k)$的幂等元秩[①]

李先崇[1]，　赵　平[1,2]

1. 贵州师范大学 数学与计算机科学学院，贵阳 550001；2. 贵阳医学院 基础医学院，贵阳 550004

摘要：设 $\mathscr{PO}_n$ 是$[n]$上的部分保序变换半群. 考虑半群 $\mathscr{PO}_n(k)=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n:\forall x\in\mathrm{dom}(\alpha),x\leqslant k\Rightarrow x\alpha\leqslant k\}$，其中 $1\leqslant k\leqslant n-1$. 证明了半群 $\mathscr{PO}_n(k)$是由秩为 $n-1$ 的幂等元生成的，且它的幂等元秩和秩分别为 $3n-3$ 和 $2n-1$.

关　键　词：部分变换半群；保序；幂等元秩；秩

中图分类号：O152.7　　　**文献标志码**：A

设$[n]=\{1,2,\cdots,n\}$，并赋予自然序. Sing_n 和 $\mathscr{P}_n$ 分别是$[n]$上的奇异变换半群和部分变换半群. 对 $\alpha\in\mathscr{P}_n$，若对 $\forall x,y\in\mathrm{dom}(\alpha)$，$x\leqslant y\Rightarrow x\alpha\leqslant y\alpha$，则称 α 是保序的. 设 $\mathscr{PO}_n$ 为 $\mathscr{P}_n$ 中的所有保序变换之集(不含恒等变换)，则 $\mathscr{PO}_n$ 是 $\mathscr{P}_n$ 的子半群，称 $\mathscr{PO}_n$ 为保序部分变换半群. 记 $\mathscr{O}_n=\mathscr{PO}_n\cap\mathrm{Sing}_n$，则 $\mathscr{O}_n$ 是 $\mathscr{PO}_n$ 的子半群，称为$[n]$上的保序变换半群. 对$\forall 1\leqslant k\leqslant n$，令

$$\mathscr{O}_n(k)=\{\alpha\in\mathscr{O}_n:\forall x\in[n],x\leqslant k\Rightarrow x\alpha\leqslant k\}$$

$$\mathscr{PO}_n(k)=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n:\forall x\in\mathrm{dom}(\alpha),x\leqslant k\Rightarrow x\alpha\leqslant k\}$$

则易验证 $\mathscr{O}_n(k)$ 和 $\mathscr{PO}_n(k)$ 都是 $\mathscr{PO}_n$ 的子半群. 显然 $\mathscr{O}_n(k)\subseteq\mathscr{PO}_n(k)$，$\mathscr{O}_n(n)=\mathscr{O}_n$ 且 $\mathscr{PO}_n(n)=\mathscr{PO}_n$.

通常，一个有限半群 S 的秩定义为：$\mathrm{rank}\,S=\min\{|A|:A\subseteq S,\langle A\rangle=S\}$. 如果 S 由它的幂等元集 E 生成，那么 S 的幂等元秩定义为：$\mathrm{idrank}\,S=\min\{|A|:A\subseteq E,\langle A\rangle=S\}$. 显然有 $\mathrm{rank}S\leqslant\mathrm{idrank}\,S$.

变换半群秩的相关研究一直以来都是半群理论研究中的热点之一(如文献[1-11]). 特别地，文献[1]研究了$[n]$上的奇异变换半群 Sing_n，并得到了它的秩和幂等元秩都为$\dfrac{n(n-1)}{2}$. 文献[2]证明了 $\mathscr{O}_n(=\mathscr{O}_n(n))$ 的秩和幂等元秩分别为 n 和 $2n-2$，并得到了 $\mathscr{PO}_n(=\mathscr{PO}_n(n))$ 的秩和幂等元秩分别为 $2n-1$ 和 $3n-2$. 文献[12]证明了 $\mathscr{O}_n(k)$ $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 是 $\mathscr{O}_n$ 的由秩为$n-1$的幂等元生成的子半群. 本文将在文献[12]工作的基础上，研究半群 $\mathscr{PO}_n(k)$，其中 $1\leqslant k\leqslant n-1$，证明了：半群 $\mathscr{PO}_n(k)$ 是由秩为 $n-1$ 的幂等元生成的，且它的幂等元秩和秩分别为 $3n-3$ 和 $2n-1$.

设 $\alpha\in\mathscr{PO}_n$，称 α 具有类(r,s)或属于集$[r,s]$，如果 $|\mathrm{dom}(\alpha)|=r$ 且 $|\mathrm{im}(\alpha)|=s$. $\mathscr{PO}_n$ 中的元 α 的秩定义为 $|\mathrm{im}(\alpha)|$. 文献[2]用$[i\rightarrow i-1]$和$[i\rightarrow i+1]$分别表示降幂等元 e 和升幂等元 f，其中 $ie=i-1$，$xe=x(x\neq i)$，$if=i+1$，$xf=x(x\neq i)$. 设 E_{n-1} 是 $\mathscr{O}_n$ 中秩为$n-1$的幂等元之集，则 E_{n-1} 是由 $n-1$ 个降幂等元$[i\rightarrow i-1]$和 $n-1$ 个升幂等元$[i\rightarrow i+1]$构成的. 对于 $k=1,2,\cdots,n$，若以 δ_k 表示集合$[n]\backslash\{k\}$上的恒等映射，记 $F_{n-1}=\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$，则 $\mathscr{PO}_n$ 中秩为$n-1$的幂等元集 $G_{n-1}=E_{n-1}\cup F_{n-1}$. 设 E_{n-1} 中的升幂等元集和降幂等元集分别为 $E_{n-1}^{+}=\{[i\rightarrow i+1]:i=1,2,\cdots,n-1\}$ 和 $E_{n-1}^{-}=\{[i\rightarrow i-1]:i=2,\cdots,n\}$，则 $E_{n-1}=E_{n-1}^{+}\cup E_{n-1}^{-}$ 且 $G_{n-1}=E_{n-1}^{+}\cup E_{n-1}^{-}\cup F_{n-1}$.

设 $\alpha\in\mathscr{PO}_n$，对 $\forall x\in\mathrm{im}(\alpha)$，$\ker(\alpha)$-类 $x\alpha^{-1}$可分为以下3种类型：稳定区组：$\min x\alpha^{-1}\leqslant x\leqslant\max x\alpha^{-1}$；

---

① 收稿日期：2012-03-08
基金项目：贵州省科学技术基金项目(黔科合[2013]2225).
作者简介：李先崇(1956-)，男，贵州遵义人，副教授，主要从事半群理论及矩阵理论的研究.

降区组：$x < \min x\alpha^{-1}$；升区组：$x > \max x\alpha^{-1}$．令

$$F(\alpha)=\{x \in \mathrm{im}(\alpha): x \in x\alpha^{-1}\}$$
$$D(\alpha)=\{x \in \mathrm{im}(\alpha): x < \min x\alpha^{-1}\}$$
$$U(\alpha)=\{x \in \mathrm{im}(\alpha): x > \max x\alpha^{-1}\}$$

则显然 $\mathrm{im}(\alpha)=F(\alpha) \cup D(\alpha) \cup U(\alpha)$．

引理 1　设 $n \geqslant 3$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 $\mathscr{O}_n(k)=\langle E_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$．

证　见文献[12] 的定理 3(B)．

定理 1　设 $n \geqslant 3$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 $\mathscr{PO}_n(k)=\langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$．

证　易验证 $\mathscr{PO}_n(k)$ 是 $\mathscr{PO}_n$ 的子半群．显然 $G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\} \subseteq \mathscr{PO}_n(k)$，从而 $\langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle \subseteq \mathscr{PO}_n(k)$．对 $\forall \alpha \in \mathscr{PO}_n(k)$，以下分 4 种情况证明 $\alpha \in \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$：

情形 1　若 $\alpha=\theta$，其中 θ 是 $[n]$ 上的空变换，显然 $F_{n-1} \subseteq G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}$．易验证 $\theta=\delta_1\delta_2\cdots\delta_n$，因此 $\alpha \in \langle F_{n-1}\rangle \subseteq \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$．

情形 2　若 $\alpha \in \mathscr{O}_n$，则显然 $\alpha \in \mathscr{O}_n(k)$，从而由引理 1 可得

$$\alpha \in \langle E_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle \subseteq \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$$

情形 3　若 $\alpha \in [s, s]$，且 α 为恒等映射，其中 $1 \leqslant s \leqslant n-2$．设 $[n] \backslash \mathrm{dom}(\alpha)=\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-s}\}$．令 ε_j 是 $[n] \backslash \{x_j\}$ 上的恒等映射，则显然 $\varepsilon_j \in F_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}$．易验证 $\alpha=e_1e_2\cdots e_{n-s}$，因此

$$\alpha \in \langle F_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle \subseteq \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$$

情形 4　若 $\alpha \in [r, s]$ $(s \leqslant r \leqslant n-1)$，且 α 不是恒等映射．不失一般性，假设

$$\alpha=\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_p & A_{p+1} & \cdots & A_q & A_{q+1} & \cdots & A_s \\ a_1 & \cdots & a_p & a_{p+1} & \cdots & a_q & a_{q+1} & \cdots & a_s \end{pmatrix} \in [r, s]$$

其中 $F(\alpha)=\{a_1, \cdots, a_p\}$，$D(\alpha)=\{a_{p+1} < \cdots < a_q\}$，$U(\alpha)=\{a_{q+1} > \cdots > a_s\}$．设 $1_{[n]}$ 是 $[n]$ 上的恒等变换，令 $\mathscr{O}_n^{\ 1}=\mathscr{O}_n \cup \{1_{[n]}\}$(由 $\mathscr{O}_n \subseteq \mathrm{Sing}_n$ 知 $1_{[n]} \notin \mathscr{O}_n$)．设 $c_i=\min\{a_i, \min A_i\}$，$d_i=\max\{a_i, \max A_i\}$，$i=1,\cdots,s$，则 $c_i \leqslant a_i \leqslant d_i$．对严格部分保序变换 $\alpha_i=\begin{pmatrix} A_i \\ a_i \end{pmatrix} \in \mathscr{PO}_n$，定义它在 $\mathscr{O}_n^1$ 的完全 α_i^* 如下：

$$x\alpha_i^*=\begin{cases} a_i & c_i \leqslant x \leqslant d_i \\ x & \text{否则} \end{cases}$$

显然，当且仅当 $A_i=\{a_i\}$ 时，$\alpha_i^*=1_{[n]}$．由 α 不是恒等映射易知，$\alpha_1^*,\cdots,\alpha_s^*$ 不全为恒等变换 $1_{[n]}$．我们断言：若 $\alpha_i^* \neq 1_{[n]}$，则 $\alpha_i^* \in \mathscr{O}_n(k)$．事实上，设 $x \leqslant k$，若 $x \notin [c_i, d_i]$，则 $x\alpha_i^*=x \leqslant k$；若 $x \in [c_i, d_i]$，则 $a_i \leqslant x$，或者 $\min A_i \leqslant x$ (注意到 $c_i=\min\{a_i, \min A_i\}$)．(i) 若 $a_i \leqslant x$，则 $x\alpha_i^*=a_i \leqslant x \leqslant k$；(ii) 若 $\min A_i \leqslant x$，则 $\min A_i \leqslant k$，于是由 $\alpha \in \mathscr{PO}_n(k)$ 可得 $a_i=(\min A_i)\alpha \leqslant k$，从而 $x\alpha_i^*=a_i \leqslant k$．

注意到，当 $a_i \in F(\alpha)$ 时，$c_i=\min A_i \leqslant a_i \leqslant \max A_i=d_i$；当 $a_i \in D(\alpha)$ 时，$c_i=a_i < \min A_i \leqslant \max A_i=d_i$；当 $a_i \in U(\alpha)$ 时，$c_i=\min A_i \leqslant \max A_i < a_i=d_i$．设 α_0 是 $\mathrm{dom}(\alpha)$ 上的恒等映射，由 α_i^* 的定义易验证 $\alpha=\alpha_0\alpha_1^*\cdots\alpha_s^*$．由情形 3 可知 $\alpha_0 \in \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$．若 $\alpha_i^* \neq 1_{[n]}$，则 $\alpha_i^* \in \mathscr{O}_n(k)$(已证)，于是由引理 1 可得

$$\alpha_i^* \in \mathscr{O}_n(k)=\langle E_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle \subseteq \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$$

从而 $\alpha=\alpha_0\alpha_1^*\cdots\alpha_s^* \in \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\} \cup \{1_{[n]}\}\rangle$．注意到

$$\langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\} \cup \{1_{[n]}\}\rangle=\langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle \cup \{1_{[n]}\}$$

再由 $\alpha \neq 1_{[n]}$(因为 $\alpha \in [r, s]$) 可得 $\alpha \in \langle G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}\rangle$．

引理 2　设 $n \geqslant 3$，则 $\mathscr{PO}_n=\langle G_{n-1}\rangle$，且 G_{n-1} 的任一真子集都不能生成 $\mathscr{PO}_n$．

证　见文献[2] 的定理 3.13 及引理 3.14．

引理 3　设 $n \geqslant 3$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，令 $E_k=G_{n-1} \backslash \{[k \rightarrow k+1]\}$，则 E_k 是半群 $\langle E_k\rangle$ 唯一的最小幂等元生成集．

证　设 $\mathscr{PO}_n$ 中秩为 $n-1$ 的元素之集为 D_{n-1}，即 $D_{n-1}=\{\alpha \in \mathscr{PO}_n: |\mathrm{im}(\alpha)|=n-1\}$．假设 F 是 $\langle E_k\rangle$ 的任意幂等元生成集，则 $\langle E_k\rangle=\langle F\rangle$．注意到 $E_k \subseteq D_{n-1}$，令 $\widetilde{F}=F \cap D_{n-1}$，则显然有

$$\langle F \rangle \cap D_{n-1} = \langle \widetilde{F} \rangle \cap D_{n-1}$$

于是

$$E_k \subseteq \langle E_k \rangle \cap D_{n-1} = \langle F \rangle \cap D_{n-1} = \langle \widetilde{F} \rangle \cap D_{n-1} \subseteq \langle \widetilde{F} \rangle$$

从而

$$G_{n-1} = E_k \cup \{[k \to k+1]\} \subseteq \langle \widetilde{F} \rangle \cup \{[k \to k+1]\} \subseteq \langle \widetilde{F} \cup \{[k \to k+1]\} \rangle$$

进而，由引理 2 可得 $\langle \widetilde{F} \cup \{[k \to k+1]\} \rangle = \langle G_{n-1} \rangle = \mathscr{PO}_n$．由 F 是 $\langle E_k \rangle$ 的任意幂等元生成集易知，$\widetilde{F} = F \cap D_{n-1} \subseteq G_{n-1}$，于是 $(\widetilde{F} \cup \{[k \to k+1]\}) \subseteq G_{n-1}$，从而由引理 2 可得 $G_{n-1} = \widetilde{F} \cup \{[k \to k+1]\}$．进而，由 $G_{n-1} = E_k \cup \{[k \to k+1]\}$ 可得 $E_k \subseteq \widetilde{F}$．因此 $E_k \subseteq \widetilde{F} \subseteq F$．由 F 的任意性可得，E_k 是半群 $\langle E_k \rangle$ 唯一的最小幂等元生成集．

定理 2　设 $n \geqslant 3$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 idrank $\mathscr{PO}_n(k) = 3n-3$．

证　令 $E_k = G_{n-1} \setminus \{[k \to k+1]\}$，则由定理 1 可得 $\mathscr{PO}_n(k) = \langle E_k \rangle$，从而由引理 3 可知，$E_k$ 是 $\mathscr{PO}_n(k)$ 唯一的最小幂等元生成集．因此 idrank $\mathscr{PO}_n(k) = |E_k| = 3n-3$．

令

$$D = \{\eta_i : \eta_i = \delta_{i+1} \cdot [i \to i+1],\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$$

$$G_k = E_{n-1}^- \cup (D \setminus \{\eta_k\}) \cup \{\delta_1, \delta_{k+1}\} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1$$

引理 4　设 $n \geqslant 3$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 $\mathscr{PO}_n(k) = \langle G_k \rangle$．

证　由 D 的定义易知

$$(D \setminus \{\eta_k\}) \subseteq \langle (E_{n-1}^+ \setminus \{[k \to k+1]\}) \cup F_{n-1} \rangle \subseteq \langle G_{n-1} \setminus \{[k \to k+1]\} \rangle$$

于是由定理 2 可得

$$G_k = E_{n-1}^- \cup (D \setminus \{\eta_k\}) \cup \{\delta_1, \delta_{k+1}\} \subseteq \langle G_{n-1} \setminus \{[k \to k+1]\} \rangle = \mathscr{PO}_n(k)$$

从而 $\langle G_k \rangle \subseteq \mathscr{PO}_n(k)$．易验证：$\delta_{i+1} = \eta_i \cdot [i+1 \to i]$ 且 $[i \to i+1] = [i+1 \to i] \cdot \eta_i$．由 $[i+1 \to i] \in E_{n-1}^- \subseteq G_k$ 及 $\eta_i \in G_k (i \neq k)$ 可得，$\delta_{i+1} \in \langle G_k \rangle$，$[i \to i+1] \in \langle G_k \rangle (i \neq k)$，于是由 $\delta_1, \delta_{k+1} \in G_k$ 及 $E_{n-1}^- \subseteq G_k$ 可得 $F_{n-1} \subseteq \langle G_k \rangle$ 及 $E_{n-1} \setminus \{[k \to k+1]\} \subseteq \langle G_k \rangle$，从而

$$G_{n-1} \setminus \{[k \to k+1]\} = F_{n-1} \cup E_{n-1} \setminus \{[k \to k+1]\} \subseteq \langle G_k \rangle$$

进而，由定理 1 可得，$\mathscr{PO}_n(k) = \langle G_{n-1} \setminus \{[k \to k+1]\} \rangle \subseteq \langle G_k \rangle$．因此 $\mathscr{PO}_n(k) = \langle G_k \rangle$．

为了叙述上的方便，在 $\mathscr{PO}_n(k)$ 上引入下面的二元关系：对 $\forall \alpha, \beta \in \mathscr{PO}_n(k)$，定义

$$\alpha \mathscr{L}^{\diamond} \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}(\alpha) = \mathrm{im}(\beta)$$

$$\alpha \mathscr{R}^{\diamond} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$$

$$\alpha \mathscr{J}^{\diamond} \beta \Leftrightarrow |\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)|$$

易验证 $\mathscr{L}^{\diamond}, \mathscr{R}^{\diamond}, \mathscr{J}^{\diamond}$ 都是 $\mathscr{PO}_n(k)$ 上的等价关系．显然，$\mathscr{L}^{\diamond}, \mathscr{R}^{\diamond} \subseteq \mathscr{J}^{\diamond}$．对 $0 \leqslant r \leqslant n-1$，记 $J_r^{\diamond} = \{\alpha \in \mathscr{PO}_n(k) : |\mathrm{im}(\alpha)| = r\}$，则 $\mathscr{PO}_n(k)$ 有 n 个 $\mathscr{J}^{\diamond}$-类 $J_{n-1}^{\diamond}, J_{n-2}^{\diamond}, \cdots, J_1^{\diamond}, J_0^{\diamond}$（这里 J_0 由空变换组成）．

引理 5　设 $\alpha, \beta \in \mathscr{PO}_n(k)$，若 $(\alpha, \beta) \in \mathscr{J}^{\diamond}$，$(\alpha, \alpha\beta) \in \mathscr{J}^{\diamond}$，则 $(\alpha\beta, \beta) \in \mathscr{L}^{\diamond}$，$(\alpha, \alpha\beta) \in \mathscr{R}^{\diamond}$．

证　对 $\forall \alpha, \beta \in \mathscr{PO}_n(k)$，若 $(\alpha, \beta) \in \mathscr{J}^{\diamond}$，$(\alpha, \alpha\beta) \in \mathscr{J}^{\diamond}$，则 $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\beta)| = |\mathrm{im}(\alpha\beta)|$．再由 $\mathrm{im}(\alpha\beta) \subseteq \mathrm{im}(\beta)$ 及 $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$（由 $|\mathrm{im}(\alpha)| = |\mathrm{im}(\alpha\beta)|$ 易得 $\mathrm{dom}(\alpha) \subseteq \mathrm{dom}(\beta)$，从而 $\ker(\alpha) \subseteq \ker(\alpha\beta)$）可得：$\mathrm{im}(\alpha\beta) = \mathrm{im}(\beta)$，$\ker(\alpha) = \ker(\alpha\beta)$．因此 $(\alpha\beta, \beta) \in \mathscr{L}^{\diamond}$，$(\alpha, \alpha\beta) \in \mathscr{R}^{\diamond}$．

定理 3　设 $n \geqslant 3$ 且 $1 \leqslant k \leqslant n-1$，则 rank $\mathscr{PO}_n(k) = 2n-1$．

证　由引理 4 知 $\mathscr{PO}_n(k) = \langle G_k \rangle$，从而 rank $\mathscr{PO}_n(k) \leqslant |G_k| = 2n-1$．由引理 5 易知，$\mathscr{PO}_n(k)$ 的任意一个生成集都必须覆盖 $\mathscr{PO}_n(k)$ 的顶端 $\mathscr{J}$-类 $J_{n-1}^{\diamond}$ 中的每个 $\mathscr{R}^{\diamond}$-类．注意到 $\alpha \mathscr{R}^{\diamond} \beta \Leftrightarrow \ker(\alpha) = \ker(\beta)$，对 $\forall \alpha, \beta \in \mathscr{PO}_n(k)$．易验证集合 G_k 中的元素取自 $\mathscr{PO}_n(k)$ 的顶端 $\mathscr{J}$-类 $J_{n-1}^{\diamond}$ 中的不同的 $\mathscr{R}^{\diamond}$-类．进而 rank $\mathscr{PO}_n(k) \geqslant |G_k| = 2n-1$．因此 rank $\mathscr{PO}_n(k) = 2n-1$．

参考文献：

[1]　GOMES G M S, HOWIE J M. On the Ranks of Certain Finite Semigroups of Transformations [J]. Math Proc Camb Phil Soc, 1987, 101(3): 395-403.

[2] GOMES G M S, HOWIE J M. On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Semigroup Forum, 1992, 45(1): 272-282.

[3] GARBA G U. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations [J]. Portugal Math, 1994, 51(2): 185-204.

[4] YANG Xiu-liang. On the Nilpotent Ranks of the Principal Factors of Order-Preserving Transformation Semigroups [J]. Semigroup Forum, 1998, 57(3): 331-340.

[5] BARNES G, LEVI I. On Idempotent Ranks of Semigroups of Partial Transformations [J]. Semigroup Forum, 2005, 70(1): 81-96.

[6] LEVI I. Nilpotent Ranks of Semigroups of Partial Transformations [J]. Semigroup Forum, 2006, 72(3): 459-476.

[7] 徐 波，冯荣权，高荣海. 一类变换半群的秩 [J]. 数学的实践与认识，2010，40(8)：222-224.

[8] 赵 平，游泰杰，徐 波，等. 降序且保序有限部分变换半群的幂等元秩 [J]. 山东大学学报：理学版，2011，46 (4)：75-77.

[9] 赵 平，游泰杰，徐 波. 半群 CPO_n 的秩 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2011，33(6)：106-110.

[10] 高荣海，徐 波. 核具有连续横截面的保序变换半群的秩 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2013，38(4)：18-24.

[11] 龙伟锋，游泰杰，龙伟芳，等. 保 E^* 关系的部分变换半群 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2013，35(4)：63-66.

[12] XU Bo, ZHAO Ping, LI Jun-yang. Locally Maximal Idempotent-Generated Subsemigroups of Singular Order-Preserving Transformation Semigroups [J]. Semigroup Forum, 2006, 72(3): 488-492.

On Idempotent Ranks of Semigroup $\mathscr{PO}_n(k)$

LI Xian-chong[1], ZHAO Ping[1,2]

1. School of Mathematics and Computer Science, GuiZhou Normal University, Guiyang 550001, China;

2. Department of Basic Medicine, Guiyang Medical College, Guiyang 550004, China

Abstract: Let $\mathscr{PO}_n$ be the semigroup of all order-preserving partial transformations on $[n]$. In the paper we consider semigroup $\mathscr{PO}_n(k)=\{\alpha\in\mathscr{PO}_n: \forall x\in \mathrm{dom}(\alpha), x\leqslant k\Rightarrow x\alpha\leqslant k\}$, where $1\leqslant k\leqslant n-1$, and show that $\mathscr{PO}_n(k)$ is generated by idempotents of rank $n-1$ and its idempotent rank and rank are equal to $3n-3$ and $2n-1$, respectively.

Key words: partial transformation semigroup; order-preserving; idempotent rank; rank

责任编辑 廖 坤