第 38 卷 第 10 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2013 年 10 月
Vol. 38 No. 10 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Oct. 2013

文章编号:1000-5471(2013)10-0001-04

π'-元素的共轭类长个数为 2 的有限群的结构①

冯 海 辉

上海海事大学 数学系,上海 201306

摘要:设 π 为一些素数的集合,G 是一个有限 π-可分群. 刻画了群 G 中 π'-元素的共轭类长的个数为 2 的有限群的结构.

关 键 词:π-可分群;共轭类;π'-元素

中图分类号:O152.1 **文献标志码:A**

在有限群论中,利用元素的共轭类个数及其长等算术条件来研究有限群的结构一直是人们研究的一个重要内容,国内外许多群论学者在这方面作了大量工作(如文献[1-5]). 文献[1]的一个重要结果是:如果 1 和 $m(>1)$ 是群 G 仅有的两个共轭类长,则存在一个素数 p,使得 $G=P\times A$,其中 P 为 G 的 Sylow p-子群,A 为交换群. 文献[2]推广了文献[1]的结论. 本文主要研究当群 G 的 π'-元素的共轭类长个数为 2 时有限 π-可分群的结构. 文中提到的群均指有限群. 本文的主要结果为:

定理 1 设 G 为 π-可分群. 若 $\{1, m\}$ 是由 G 的 π'-元素的共轭类长构成的集合,则

(i) 若 $\pi\cap\pi(m)=\pi(m)$,则 G 的 Hall π'-子群为交换群,特别地,$l_{\pi'}(G)=1$;

(ii) 若 m 不是 π-数,则有 $m=p_1^{\alpha_1}\cdots p_i^{\alpha_i}q^{\beta}$,其中 $p_j\in\pi$,$\alpha_j\geqslant 0$,$j=1,\cdots,i$,$q\in\pi'$,$G=HQ\times A$,$H\in \mathrm{Hall}_{\pi}(G)$,$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$,$A\leqslant Z(G)$.

设 π 为一个素数集合,记 $G_{\pi'}$ 为由群 G 中 π'-元素构成的集合,$\mathrm{Hall}_{\pi}(G)$ 为群 G 的 Hall π-子群的集合,$\pi(m)$ 表示由整数 m 的素因子构成的集合,$\bar{G}$ 为 G 对某个正规子群的商群. 文中提到的术语和记号均为标准的,可参考文献[4].

引理 1 设 G 为 π-可分群,$x\in G_{\pi'}$ 且 $C_G(x)\neq G$. 假设

(i) 若 $C_G(a)\leqslant C_G(x)$,$a\in G_{\pi'}$,则 $C_G(a)=C_G(x)$;

(ii) 若 $C_G(x)\leqslant C_G(b)$,$b\in G_{\pi'}$,则 $C_G(x)=C_G(b)$ 或者 $b\in Z(G)$.

则有 $C_G(x)=H\times L$,$H\in \mathrm{Hall}_{\pi}(G)$,$L\leqslant Z(C_G(x))$,或者 $C_G(x)=HQ\times A$,$H\in \mathrm{Hall}_{\pi}(G)$,$Q\in \mathrm{Syl}_q(G)$,$A\leqslant Z(G)$,$q\in\pi'$.

证 令 $x=x_1\cdots x_r$,其中 x_i 为 q_i-元,$q_i\neq q_j$,$i\neq j$. 因为 x 为非中心元,所以存在整数 i,使得 x_i 为非中心元,于是有 $C_G(x)\leqslant C_G(x_i)$. 由假设条件可得 $C_G(x)=C_G(x_i)$. 因此,不失一般性,假设 x 是一个 q-元.

如果 $\pi(C_G(x))=\pi\cup\{q\}$,则结论成立. 下面假设存在素数 $r\in\pi(C_G(x))-(\pi\cup\{q\})$,$R$ 是 $C_G(x)$ 的一个 Sylow r-子群. 对任意 $a\in R$,由于 $[a, x]=1$ 且 $(o(a), o(x))=1$,再根据假设条件,我们有 $C_G(ax)=C_G(a)\cap C_G(x)$,从而有 $C_G(x)=C_G(ax)\leqslant C_G(a)$,于是得 $R\leqslant Z(C_G(x))$,故有 $C_G(x)=HQ\times A$,其中

① 收稿日期:2011-12-28
基金项目:国家自然科学基金项目资助(11101268);上海海事大学校基金(20120062).
作者简介:冯海辉(1981-),男,山西祁县人,博士,讲师,主要从事有限群论的研究.

$A \leqslant Z(C_G(x))$. 如果 $A \leqslant Z(G)$,则引理1成立. 下面可以假设 $b \in A$ 为非中心元. 注意到 $[b, x]=1$ 且 $(o(b), o(x))=1$,由假设条件我们可得 $C_G(bx)=C_G(x)=C_G(b)$. 取元素 $c \in Q$,则有 $C_G(bc)=C_G(b) \cap C_G(c) \leqslant C_G(b)=C_G(x)$. 再由假设条件可得 $C_G(bc)=C_G(x)$,且有 $C_G(x) \leqslant C_G(c)$. 从而可得 $Q \leqslant Z(C_G(x))$. 令 $L=Q \times A$,则有 $C_G(x)=H \times L$,其中 $L \leqslant Z(C_G(x))$,从而引理1得证.

引理2 设 G 为 π-可分群,则群 G 的 π'-元的共轭类长为 π-数的充分必要条件为 G 有一个交换的 Hall π'-子群. 特别地,$l_{\pi'}(G)=1$.

证 由文献[5]中引理7可得.

定理1的证明

证 由引理2,结论(i)显然成立. 下面假设 m 不是 π-数,且素数 q 满足 $q \mid m$ 但 $q \notin \pi$. 我们将分步骤证明.

步骤1 对任意非中心元 $x \in G_{\pi'}$,我们可以假设 $C_G(x)=H \times L$,其中 H 为 $C_G(x)$ 的一个 Hall π-子群,且 $L \leqslant Z(C_G(x))$.

由引理1,假设结论(ii)对某个非中心元 $x \in G_{\pi'}$ 成立. 若存在一个非中心 r-元 z,满足 $z \in G_{\pi'}$,$r \neq q$,则 $A < \langle A, z\rangle \leqslant C_G(z)$. 因为 $z \in G_{\pi'}$,所以由 $|C_G(x)|=|C_G(z)|$ 可得 $|C_G(x)|_{\{\pi, p\}'}=|C_G(z)|_{\{\pi, p\}'}$,矛盾. 因此 $G_{\pi'}$ 的每个 r-元均为中心元. 进一步,我们有 $G=HQ \times A$,其中 H 为 G 的一个 Hall π-子群,Q 为 G 的一个 Sylow q-子群. 故在下面的证明中,我们可以假设,对 $G_{\pi'}$ 中的任意非中心元 x,有 $C_G(x)=H \times L$,其中 $H \in \mathrm{Hall}_{\pi}(C_G(x))$,$L \leqslant Z(C_G(x))$.

步骤2 设 x 与 y 为 $G_{\pi'}$ 中的两个非中心元. 若 $C_G(x) \neq C_G(y)$,则有 $(C_G(x) \cap C_G(y))_{\pi'}=Z(G)_{\pi'}$.

显然我们有 $Z(G)_{\pi'} \leqslant (C_G(x) \cap C_G(y))_{\pi'}$. 如果存在一个非中心元 $z \in (C_G(x) \cap C_G(y))_{\pi'}$,由步骤1可得 $z \in Z(C_G(x))$,且有 $z \in Z(C_G(y))$. 于是我们有 $C_G(x) \leqslant C_G(z)$ 和 $C_G(y) \leqslant C_G(z)$. 再由假设条件和引理1可得 $C_G(x)=C_G(z)=C_G(y)$,矛盾.

在下面的证明中,我们将根据 $G_{\pi'}$ 中非中心元的中心化子是否共轭分两种情形讨论.

情形1 首先我们假设对任意两个非中心元 $x, y \in G_{\pi'}$,$C_G(x)$ 和 $C_G(y)$ 在 G 中共轭.

步骤3 假设 $O^{\pi}(G)=G$.

如果 $O^{\pi}(G)<G$,则令 $x \in O^{\pi}(G)$ 为 π'-元,且有 $x \notin Z(O^{\pi}(G))$,则此时有 $x \notin Z(G)$. 由步骤1,我们有 $C_G(x)=H \times L$,其中 H 是 $C_G(x)$ 的 Hall π-子群,且 $L \leqslant Z(C_G(x))$. 因为 $L \leqslant O^{\pi}(G)$,所以

$$O^{\pi}(G) \cap C_G(x)=L(H \cap O^{\pi}(G))$$

从而有

$$\frac{|G|}{|O^{\pi}(G)|} \cdot \frac{|O^{\pi}(G)|}{|O^{\pi}(G) \cap C_G(x)|}=\frac{|G|}{|C_G(x)|} \cdot \frac{|H|}{|H \cap O^{\pi}(G)|}$$

进一步可得

$$\frac{|O^{\pi}(G)|}{|O^{\pi}(G) \cap C_G(x)|}=m \frac{|HO^{\pi}(G)|}{|G|}=\frac{m}{l}$$

其中 l 或者是一个 π-数,或者等于1. 根据前述假设,$G_{\pi'}$ 中的所有非中心元的中心化子是共轭的,则这些中心化子的 Hall π-子群也对应共轭. 因此 l 是一个不依赖于 x 的固定的 π-数. 由此表明 $\left\{1, \frac{m}{l}\right\}$ 是 $O^{\pi}(G)$ 中唯一的共轭类. 我们注意到 $\frac{m}{l}$ 不是 π-数,因此对 $O^{\pi}(G)$ 使用归纳法可得 $O^{\pi}(G)=HQ \times A_0$,其中 H 是 $O^{\pi}(G)$ 的 Hall π-子群,Q 是 G 的 Sylow q-子群,且有 $q \notin \pi$,$A_0 \leqslant Z(O^{\pi}(G))$.

如果非中心元 $x, y \in G_{\pi'}$ 的中心化子均相等,则有 $[x, y]=1$. 这就表明对任意非中心元 $x \in G_{\pi'}$,$|G:C_G(x)|$ 是一个 π-数,矛盾. 因此我们可以假设两个非中心元 $x, y \in G_{\pi'}$,满足 $C_G(x) \neq C_G(y)$. 注意到 $x, y \in O^{\pi}(G)$,并且结合步骤2,我们有 $A_0 \subseteq (C_G(x) \cap C_G(y))_{\pi'}=Z(G)_{\pi'}$. 由此可得 $G=HQ \times A_0$,其中 H 为 G 的 Hall π-子群,Q 为 G 的 Sylow q-子群,且 $A_0 \leqslant Z(G)$.

步骤4 对任意非中心元 $x \in G_{\pi'}$,我们有 $C_G(x)<N_G(C_G(x))$.

假设存在一个非中心元 $x \in G_{\pi'}$,使得 $C_G(x)=N_G(C_G(x))$. 由步骤1可得 $C_G(x)=H \times L$,其中 H 是

$C_G(x)$ 的 Hall π-子群，且有 $L \leqslant Z(C_G(x))$．我们断言，对任意满足 $q \mid m$ 但 $q \notin \pi$ 的素数 q，我们有 $q \,\Big|\, |L/Z(G)_{\pi'}|$．否则，由于 $G_{\pi'}$ 中的非中心元的中心化子有相同的阶，故任意 q-元为中心元．从而得 $q \nmid m$，矛盾．因此断言成立．又因为 m 不是 π-数，从而存在 $C_G(x)$ 的 Sylow r-子群 $L_i \leqslant L$，使得 L_i 是 G 的非中心子群，且为 G 的 Sylow r-子群 P_i 的真子群，其中 $r \notin \pi$.

注意到 $L_i < N_{P_i}(L_i) \leqslant N_G(L_i)$，我们令 $y \in N_G(L_i) - L_i$．如果 $L^y \neq L$，由步骤 2，我们有 $L^y \cap L = Z(G)_{\pi'}$．但是由 $L_i^y = L_i$ 可得 $L_i \leqslant L^y \cap L = Z(G)_{\pi'}$，矛盾，从而有 $L^y = L$．进一步可得 $H \leqslant C_G(L) = C_G(L^y) \leqslant C_G(x^y) = H^y \times L^y$．因此 $H = H^y$ 且 $y \in N_G(C_G(x)) = C_G(x)$，矛盾.

步骤 5　情形 1 下定理 1 的结论.

由步骤 3，我们只需考虑 $O^{\pi'}(G) < G$ 的情形．令 $x \in G_{\pi'}$，$g \in G$，$g = g_1 g_2$，其中 g_1 和 g_2 分别为 g 的 π-部分和 π'-部分．如果 $g_2 \in Z(G)$，那么 $g \in O^{\pi'}(G)Z(G)_{\pi'}$；如果 $g_2 \notin Z(G)$，由假设，对某个 $h \in G$ 有 $C_G(g_2) = C_G(x)^h$，则 $g \in C_G(x)^h$．从而可得

$$G = \bigcup_{h \in G} C_G(x)^h \cup O^{\pi'}(G)Z(G)_{\pi'}$$

进一步，我们有

$$|G| \leqslant |G : N_G(C_G(x))| \cdot (|C_G(x)| - 1) + |O^{\pi'}(G)Z(G)_{\pi'}|$$

从而有

$$1 \leqslant \frac{|C_G(x)| - 1}{|N_G(C_G(x))|} + \frac{|O^{\pi'}(G)Z(G)_{\pi'}|}{|G|}$$

令 $|N_G(C_G(x))| = n$．如果 $O^{\pi'}(G)Z(G)_{\pi'} < G$，由步骤 4，我们可得 $\dfrac{n}{|C_G(x)|} \geqslant 2$．这就表明

$$1 \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}$$

矛盾.

情形 2　下面我们假设存在 $G_{\pi'}$ 的两个元素 x, y，使得 $C_G(x)$ 与 $C_G(y)$ 在 G 中不共轭．记 $\bar{G} = G/Z(G)_{\pi'}$.

步骤 6　假设 $\bar{x}, \bar{y} \neq 1$ 是 $\bar{G}$ 中的两个元素，且满足 $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$ 和 $C_G(x) \neq C_G(y)$．则可知 $o(\bar{x}) = o(\bar{y})$ 是素数.

易见 x 和 y 是两个 π'-元素，因此由假设条件可知 $\overline{xy} = \overline{yx}$ 也是 π'-元素，从而可知 xy 为 π'-元素．不失一般性，我们可以假设 $o(\bar{x}) < o(\bar{y})$，则有 $(\bar{x} \cdot \bar{y})^{o(\bar{x})} = \bar{y}^{o(\bar{x})} \neq 1$，进一步可得 $1 \neq (\bar{x} \cdot \bar{y})^{o(\bar{x})} = \overline{xy}^{o(\bar{x})} \in \overline{C_G(x)} \cap \overline{C_G(y)}$．由步骤 2 可得 $C_G(x) = C_G(xy)$，由此可知 $x \in C_G(y)$．再次利用步骤 2，我们有 $C_G(x) = C_G(y)$，矛盾．故 $o(\bar{x}) = o(\bar{y})$.

现在假设对 $o(\bar{x})$ 的某个素因子 s 有 $(\bar{x})^s \neq 1$，则可得 $C_G(x) \leqslant C_G(x^s) < G$，因此 $o(\bar{x}) = o(\bar{y}) = o(\bar{x}^s)$，矛盾.

步骤 7　令 $g \in G_{\pi'}$ 是非中心元，则存在非中心元 $x \in G_{\pi'}$，使得 $\bar{g}^{\bar{G}} \cap \overline{C_G(x)} = \varnothing$，其中 $\bar{g}^{\bar{G}}$ 是 $\bar{G}$ 中包含 $\bar{g}$ 的共轭类.

否则，对 $G_{\pi'}$ 中的任意一个非中心元 x，存在一个元素 $\bar{n} \in \bar{G}$，记 $\bar{g}^{\bar{n}}$ 为 $\bar{g}$，使得 $\bar{g}^{\bar{n}} \in \overline{C_G(x)}$．于是有 $\overline{g^n} = \bar{g}^{\bar{n}} \in \overline{C_G(x)}$，且进一步可得 $g^n \in C_G(x)$．由步骤 1 可知 $g^n \in Z(C_G(x))$，从而 $C_G(x) \leqslant C_G(g^n)$．由引理 1 有 $C_G(x) = C_G(g^n)$，这就表明 $G_{\pi'}$ 中两个非中心元的任意两个中心化子在 G 中是共轭的，矛盾.

步骤 8　商群 $\bar{G}$ 中任意非中心元的阶为素数.

假设 π'-元 $\bar{g} \in \bar{G}$ 的阶 $o(\bar{g})$ 是 $\bar{G}$-合数．易知 g 是 π'-元素．由步骤 7 可知，存在非中心元 $x \in G_{\pi'}$，使得 $\bar{g}^{\bar{G}} \cap \overline{C_G(x)} = \varnothing$.

记 $\overline{C_G(x)_{\pi'}}$ 为 $\overline{C_{\pi'}}$，则 $\overline{C_{\pi'}}$ 可作用在 $\bar{g}^{\bar{G}}$ 上．事实上，如果对某个 $\bar{h} \in \bar{G}$，满足 $\bar{t} \in \overline{C_{\pi'}}$ 和 $[\bar{t}, \bar{g}^{\bar{h}}] = 1$，结合 $C_G(t) \neq C_G(g^h)$ 可得 $o(\bar{t}) = o(\bar{g}^{\bar{h}})$ 是素数，从而 $o(\bar{g})$ 也是素数，矛盾.

因此 $C_{\pi'}$ 在 $\bar{g}^{\bar{G}}$ 上的轨道有相同的长度，且均为 $|\overline{C_{\pi'}}|$，由此可得 $|\overline{C_{\pi'}}|$ 整除 $|\bar{g}^{\bar{G}}|$.

另一方面，再次利用步骤 6 可断言 $\overline{C_G(g)_{\pi'}}$ 作用在 $\bar{g}^{\bar{G}} - \bar{g}^{\bar{G}} \cap \overline{C_G(g)}$ 上无不动点．事实上，如果存在元

素 $\bar{g}^{\bar{n}} \in \bar{g}^{\bar{G}} - \bar{g}^{\bar{G}} \cap \overline{C_G(g)}$，使得对每一个 $\bar{a} \in \overline{C_G(g)_{\pi'}}$，满足$[\bar{a}, \bar{g}^{\bar{n}}]=1$，注意到 $C_G(a) \neq C_G(g^n)$，我们可得 $o(\bar{a})=o(\bar{g}^{\bar{n}})$ 是素数，从而可知 $o(\bar{g})$ 也是素数，矛盾．因此有 $|\overline{C_G(g)_{\pi'}}|$ 整除 $|\bar{g}^{\bar{G}}|-|\bar{g}^{\bar{G}} \cap \overline{C_G(g)}|$．又因为 $|\overline{C_G(g)_{\pi'}}|=|\overline{C_{\pi'}}|$，所以有 $|\overline{C_G(g)_{\pi'}}|$ 整除 $|\bar{g}^{\bar{G}} \cap \overline{C_G(g)}|$．而

$$0<|\bar{g}^{\bar{G}} \cap \overline{C_G(g)}|<|\overline{C_G(g)_{\pi'}}|$$

矛盾．

步骤 9 情形 2 下定理 1 的结论．

由步骤 1，$C_G(x)_{\pi'}$ 具有交换性，且对 $G_{\pi'}$ 中任意非中心元 x，$|C_G(x)_{\pi'}|$ 是固定的整数．由步骤 8 我们可知，对某个素数 $q \notin \pi$，$\overline{C_G(x)_{\pi'}}$ 是素数幂，且 $\bar{G}=G/Z(G)_{\pi'}$ 是 $\{\pi, q\}$-群，从而 $G=HQ \times A$，其中 H 是 G 的 Hall π-子群，Q 是 G 的 Sylow q-子群，且 $A \leqslant Z(G)$．

综上所述，定理 1 得证．

推论 1 在定理 1 的假设条件下，如果 $\alpha_i=0$，则 $G=H \times Q \times A$，其中 $H \in \mathrm{Hall}_{\pi}(G)$，$Q \in \mathrm{Syl}_q(G)$，$A \leqslant Z(G)$，$q \in \pi'$．

参考文献：

[1] ITÔ N. On Finite Groups with Given Conjugate Type I [J]. Nagoya Math J, 1953(6): 17-28.

[2] BELTRAN A, FELIPE J M. Finite Groups with Two p-Regular Conjugacy Class Lengths [J]. Bull Aust Math Soc, 2003, 67: 163-169.

[3] 赵先鹤，左红亮，陈贵云．正规子群中某些 p-A 正则元的 G-共轭类长 [J]．西南大学学报：自然科学版，2011，33(4)：104-108.

[4] KURZWEIL H, STELLMACHER B. The Theory of Finite Groups [M]. New York: Springer, 2003.

[5] BELTRAN A, FELIPE J M. Prime Powers as Conjugacy Class Lengths of π-Elements [J]. Bull Aust Math Soc, 2004, 69: 317-325.

On Structure of Finite Groups with Two Conjugacy Class Lengths of π'-Elements

FENG Hai-hui

School of Mathematics, Shanghai Maritime University, Shanghai 201306, China

Abstract: Let π be a set of prime numbers, and G a finite π-separable group. The structure of G with two exact conjugacy class lengths of π'-elements in G is studied.

Key words: π-separable group; conjugacy class; π'-element

责任编辑 廖 坤