文章编号:1000－5471(2013)10－0001－04

各项同性麦克斯韦方程在系数为弱正则时解的唯一性证明①

小巴桑次仁

西藏大学 理学院，拉萨 850000

摘要：在假设麦克斯韦方程系数为标量函数的前提下，给出了当麦克斯韦方程的系数函数正则性极弱时解的唯一性证明.

关　键　词：麦克斯韦方程；弱正则；唯一性

中图分类号：O175.23　　　**文献标志码**：A

电磁波相关反问题理论中关于正问题解的唯一性研究尤为重要[1-6]. 控制电磁波传播的方程为麦克斯韦方程，其正问题的描述如下：

假设给定时谐入射电场 $\widetilde{\boldsymbol{E}}^i=R(\boldsymbol{E}^i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$ 和磁场 $\widetilde{\boldsymbol{H}}^i=R(\boldsymbol{H}^i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})$(这里的 R 表示取项的实部)且满足均匀时谐麦克斯韦方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{x})-\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{x})=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}^i(\boldsymbol{x})+\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{E}^i(\boldsymbol{x})=0$$

其中：$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$，$\varepsilon_0$ 和 μ_0 为大于零的常数分别表示真空中的磁导率和电常数，且 $\omega\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. 在一般情况下时谐全电场满足如下的时谐麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})-\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})+\mathrm{i}\omega\varepsilon_0\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})=0 \tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$，$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$ 为属于 $L^\infty(\mathbb{R}^3)^{3\times3}$ 的实矩阵函数. 全电磁场可分解成如下的入射场 $\boldsymbol{E}^s$ 与散射场 $\boldsymbol{H}^s$

$$\boldsymbol{E}^s:=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^i \qquad \boldsymbol{H}^s:=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}^i \tag{2}$$

散射场在各方向上一致满足 Silver-Muller 散射条件，即：如果 $\boldsymbol{x}:=r\theta$，那么

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\theta\in S^2}|\boldsymbol{H}^s(r\theta)\times r\theta-r\boldsymbol{E}^s(r\theta)|=0 \tag{3}$$

其中：$S^2=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ 且 } |\boldsymbol{x}|=1\}$ 表示单位球面. 文献[1]中证明了 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$ 为逐段正则时对时谐麦克斯韦方程组解的唯一性，而本文证明了 $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})$ 为单位矩阵且 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 从各向异性简化为各项同性但同时 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ 的正则性化为极弱时，时谐麦克斯韦方程组的解的唯一性.

为了回答上面提出的电磁波相关反问题对应正问题解的唯一性，下面考虑一种特殊情况，即假设

① 收稿日期：2013－06－06
基金项目：国家自然科学地区基金(11261054).
作者简介：小巴桑次仁(1981－)，男，拉萨人，博士，主要从事偏微分方程和相关反问题方面的研究.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}):=q(\boldsymbol{x}_3)I_3,\ \varepsilon_0=q_0 \tag{4}$$

其中：$q(x_3)>0$ 为实有界标量函数，I_3 为三阶单位矩阵，q_0 为正常数. 电容率只与 x_3 轴有关这一条件不光是系数在弱正则时解的唯一性的证明所要求的，也是建立相关反问题模型的必要的条件[2-3].

定理 1　假设 Ω 为一有界长方体区域 $[0,d]\times[0,l]\times[0,h]$，$\boldsymbol{\mu}$ 为单位阵且 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})=q(x_3)I_n\in L^{\infty}(\mathbb{R})$. 则对每一个非零 ω，对应于 $\boldsymbol{E}^i=\boldsymbol{H}^i=\boldsymbol{0}$ 的时谐麦克斯韦方程组(1)的解 $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{H})\in W_{loc}^{2;2}(\Omega)$ 在整个空间内为零.

证　令 $\boldsymbol{E}\in W_{loc}^{2;2}(\Omega)$ 为时谐麦克斯韦方程组(1)的解，则当 $\boldsymbol{\mu}$ 为单位阵时，方程组(1)可写成如下关于磁场的表达式

$$\nabla\times[\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{H})]=k^2\boldsymbol{H} \tag{5}$$

其中 $k^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2$ 为常数. 方程(5)的一般弱形式为

$$\int_{\Omega}[\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\boldsymbol{x})\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})]\cdot[\nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}[\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})]\cdot[\nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}x=$$

$$k^2\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\qquad\forall\boldsymbol{V}\in H^1(\mathbb{R}^3)^3 \tag{6}$$

其中 $H^1(\mathbb{R}^3)^3$ 为索伯列夫空间. 散射条件(3)表示电磁波能量在散射场方向上递减并在无穷远处趋于零. 该散射条件满足 Rellich 引理[3] 从而确保了解在外部区域内的唯一性，即 $\boldsymbol{H}$ 在 $\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ 内为零. 因此式(6)中的项 $\int_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega}[\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})]\cdot[\nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 为零，从而可将系数函数 $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(\boldsymbol{x})$ 延伸至外部领域并表示为 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(\boldsymbol{x})$，且 $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(\boldsymbol{x})$ 在区域 Ω 内部等于 $\boldsymbol{\varepsilon}^{-1}(x)$. 经过这些设定后弱方程可写为如下形式

$$\int_{\mathbb{R}^3}[\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-1}(\boldsymbol{x})\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})]\cdot[\nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})]\mathrm{d}\boldsymbol{x}=k^2\int_{\mathbb{R}^3}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\qquad\forall\boldsymbol{V}\in H^1(\mathbb{R}^3)^3$$

上述弱解表达式巧妙地处理了解在边界上的情况. 为了证明解在整个空间内的唯一性，下面只需证明方程解在 Ω 内部的唯一性即可. 当 $\boldsymbol{\mu}$ 为单位阵时，方程(1)可写成如下关于电场的形式

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=k^2q(x_3)\boldsymbol{E} \tag{7}$$

对方程(7)应用如下等式

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\mathrm{div}\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为任意一个向量，则

$$\nabla(\mathrm{div}\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}-k^2q(x_3)\boldsymbol{E}=0 \tag{8}$$

即等价于如下方程组

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{div}\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}_1-k^2q(x_3)\boldsymbol{E}_1=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{div}\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}_2-k^2q(x_3)\boldsymbol{E}_2=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3}(\mathrm{div}\boldsymbol{E})-\Delta\boldsymbol{E}_3-k^2q(x_3)\boldsymbol{E}_3=0 \tag{11}$$

令 $E_3=\dfrac{w}{q}$，并把方程(7)写成关于 w 的形式，从方程(7)得 $\mathrm{div}(q(x_3)\boldsymbol{E})=0$，因此经过简单的运算后得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{w}{q}\right)-\frac{1}{q}\frac{\partial w}{\partial x_3} \tag{12}$$

将方程(12)代入(11)得，

$$\mathrm{div}\left(\frac{1}{q(x_3)}\nabla w\right)+k^2w=0 \tag{13}$$

其中 $q\in L^{\infty}(0,h)$. 方程(13)在下面弱形式下有意义，即当 $w\in H^1(\Omega)$ 满足

$$\int_{\Omega}\frac{1}{q(x_3)}\nabla w\cdot\nabla\varphi\mathrm{d}x=k^2\int_{\Omega}w\varphi\mathrm{d}x \tag{14}$$

对所有 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. 将方程(13) 放置于新的区域 $U=[0, d]\times[0, l]\times\mathbb{R}$ 并取其解空间

$$H_{0,0}^1(U)=\{w\in H^1(\mathbb{R}^3)\mid w|_{x_1=0}=w|_{x_1=d}=w|_{x_2=0}=w|_{x_2=l}=0\}$$

在(x_1, x_2) 横截断面上，拉普拉斯方程在$[0, d]\times[0, l]$ 上满足 Dirichlet 边界条件的本证特征族有如下表达式

$$\left((x_1, x_2)\rightarrow\sin(\frac{n\pi}{l}x_1)\sin(\frac{m\pi}{d}x_2)\right)_{(n\geqslant 1, m\geqslant 1)} \tag{15}$$

因此(15) 式为 $H_0^1([0, d]\times[0, l])$ 的一组基. 方程(13) 的任何解 $w\in H_{0,0}^1(U)$ 可以被向量组线性表示出

$$w(x_1, x_2, x_3)=\sum_{n, m\in\mathbb{N}}\alpha_{n,m}(x_3)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}x_2\right)$$

其中 $\alpha_{n,m}(x_3)\in H_{loc}^1(\mathbb{R})$. 将此表达式代入方程(13) 后，得到如下新的方程

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial x_3}\alpha_{n,m}(x_3)\right)+\left(k^2-\frac{1}{q}((\frac{n\pi}{l})^2+(\frac{m\pi}{d})^2)\right)\alpha_{n,m}(x_3)=0 \tag{16}$$

其中 $x_3\in\mathbb{R}\backslash(0, h)$ 时 $\alpha_{n,m}(x_3)=0$，n,m 为角标. 由于(16) 式主项内含有系数 q，因此为了化简该方程应用如下变量代换

$$x_3\rightarrow y_3=\begin{cases} x_3 & x_3\in\mathbb{R}\backslash(0, h) \\ \dfrac{h\int_0^{x_3}q(t)\mathrm{d}t}{\int_0^h q(t)\mathrm{d}t} & x_3\in(0, h)\end{cases} \tag{17}$$

把(17) 式应用在(16) 式上，在弱意义下得到如下方程

$$\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\alpha_{n,m}(y_3)+f(y_3)\alpha_{n,m}(y_3)=0 \tag{18}$$

其中 $f(y_3)=k^2-\frac{1}{q}\left(\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2\right)$，因此 $f(y_3)$ 有界. 由于(18) 式为二阶常微分方程且其解的紧支撑为$(0, h)$，因此可以通过简单的常微分方程理论得到 $\alpha_{n,m}(y_3)=0$，$y_3\in\mathbb{R}$. 又因为 $w=q(x_3)E_3$ 且

$$w(x_1, x_2, x_3)=\sum_{n, m\in\mathbb{N}}\alpha_{n,m}(x_3)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x_1\right)\sin\left(\frac{m\pi}{d}x_2\right)=0$$

所以 $E_3=0$.

此时方程(9) 式和(10) 式可化简为

$$\Delta E_1+k^2q(x_3)E_1=0, \Delta E_2+k^2q(x_3)E_2=0 \tag{19}$$

对方程(19) 应用 Helmholtz 方程在系数为弱正则时的解的唯一延拓性质[3]，可得在整个空间内 $E_1=E_2=0$，所以总电场向量 $\boldsymbol{E}\equiv\boldsymbol{0}$，从而通过方程(1) 便可得总磁场向量 $\boldsymbol{H}\equiv\boldsymbol{0}$. 从而定理 1 得到了证明.

下面的推论将时谐麦克斯韦方程解的唯一性延伸至一般时间相关麦克斯韦方程解的唯一性.

推论 2　对每个给定的 $\omega>0$，当入射场为零($\widetilde{\boldsymbol{E}}^i(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{0}$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}^i(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{0}$) 时麦克斯韦方程的解均为零，即 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{0}$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{0}$.

证　假设 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, t)\in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, t)\in L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$，定义如下傅里叶变换

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, \omega):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}t$$

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, \omega):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, t)\mathrm{d}t$$

因为对于每一个频率 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, \omega)$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, \omega)$ 满足时谐麦克斯韦方程组，因此由定理 1 知 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, \omega)$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, \omega)$ 均为零. 应用傅里叶逆变换便可得 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{0}$，$\widetilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, t)=\boldsymbol{0}$，推论得证.

参考文献:

[1] BALL J M, CAPDEBOSCQ Y, TSERING-XIAO B. On Uniqueness for Time Harmonic Anisotropic Maxwell's Equations with Piecewise Regular Coefficients [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 2012, 22(11): 1-9.

[2] TSERING-XIAO B. Electromagnetic Inverse Problems for Nematic Liquid Crystals [D]. Oxford: Oxford University, 2011.

[3] LIONHEART W R B, NEWTON C J P. Analysis of the Inverse Problem for Determining Nematic Liquid Crystal Director Profiles from Optical Measurements Using Singular Value Decomposition [J]. New Journal of Physics, 2007, 9(3): 63.

[4] CAKONI F, COLTON D. A Uniqueness Theorem for an Inverse Electromagnetic Scattering Problem in Inhomogeneous Anisotropic Media [J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 2003, 46(2): 293-314.

[5] MONK P. Finite Element Methods for Maxwell's Equations [M]. Oxford: Oxford University Press, 2003.

[6] COLTON D. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory [J]. Inverse Problems, 2003, 47: 67-109.

Proof of the Uniqueness of the Solutions of Isotropic Maxwell's Equations with a Low Regularity Coefficient

Basang Tsering-Xiao

Science School of Tibet University, Lhasa 850000, China

Abstract: The proof of the uniqueness of the solutions of Maxwell's equations is a very important part of the related inverse problems. Certain inverse problems about the study of liquid crystals configuration require that the coefficient of the equation be a low regularity scalar function, and this paper gives the proof of the uniqueness of the solutions of Maxwell's equations in this case.

Key words: Maxwell's equation; low regularity; uniqueness

责任编辑 张 枸