文章编号：1673-9868(2009)11-0019-04

一类具有非线性记忆的退化奇异抛物方程解的爆破①

石立新

四川农业大学 数学系，四川 雅安 625014

摘要：运用上下解方法讨论具有非线性记忆和齐次Dirichlet边界条件的退化奇异抛物方程 $x^m u_t-(x^r u_x)_x=\int_0^t u^p\,\mathrm{d}s$ 正解的爆破性质，得到方程解在有限时间爆破和全局存在的条件.

关 键 词：退化奇异抛物方程；爆破；非线性记忆

中图分类号：O175.26　　**文献标识码**：A

本文研究了如下非线性抛物方程

$$\begin{cases} x^m u_t-(x^r u_x)_x=\int_0^t u^p\,\mathrm{d}s & (x,t)\in(0,a)\times(0,T) \\ u(0,t)=u(a,t)=0 & t\in(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x) & x\in[0,a] \end{cases} \tag{1}$$

设 $D=(0,a)$，$\Omega_t=D\times(0,t]$，$\overline{D}$，$\overline{\Omega}_t$ 是相应的闭包；$u_0(x)\in C^{2+\alpha}(\overline{D})$，$\alpha\in(0,1)$，且是非负非平凡函数；$u_0(0)=u_0(a)=0$，$u_0(x)\geqslant 0$，$u_0$ 满足相容性条件；$T>0$，$a>0$，$r\in[0,1)$，$|m|+r\neq 0$，$p>1$. 因为 $|m|+r\neq 0$，当 x 趋于 0 时，u_t，u_x，u_{xx} 的系数会趋于 0 或者 ∞，则称方程为退化或奇异的.

在文献[1-2]中，Floater 和 Chan 等讨论了如下退化抛物方程解的爆破性质

$$\begin{cases} x^q u_t-u_{xx}=u^p & (x,t)\in(0,a)\times(0,T) \\ u(0,t)=u(a,t)=0 & t\in(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x) & x\in[0,a] \end{cases} \tag{2}$$

其中：$q>0$，$p>1$. 当初值 $u_0(x)$ 满足一定条件时，Floater 在文献[2]中证明了：若 $1<p\leqslant q+1$，方程(2)的解 $u(x,t)$ 在边界 $x=0$ 处爆破.

在文献[3]中，陈友鹏等研究了下面的带有非局部源的非线性退化反应扩散方程

$$\begin{cases} x^q u_t-(x^\gamma u_x)_x=\int_0^a u^p\,\mathrm{d}x & (x,t)\in(0,a)\times(0,T) \\ u(0,t)=u(a,t)=0 & t\in(0,T) \\ u(x,0)=u_0(x) & x\in[0,a] \end{cases} \tag{3}$$

建立了方程经典解的局部存在和唯一性理论，得到了正解整体存在和爆破的充分条件，并证明了在一定条件下，爆破集是整个区域.

在文献[4]中，李玉祥等考虑如下的半线性抛物方程

---

① 收稿日期：2008-10-28
基金项目：四川省教育厅重点项目(08ZA060).
作者简介：石立新(1979-)，男，四川安岳人，讲师，主要从事数学物理方程的研究.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^q \int_0^t u^p \mathrm{d}s & x \in \Omega,\ t \in (0,\ T) \\ u(x,\ 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u\mid_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

其中 $p,\ q > 0$. 当 $p + q > 1$ 时，方程(4)的解在有限时间爆破；$p + q \leqslant 1$ 时，方程(4)的解整体存在. 另外还得到 $q = 0$ 时爆破解的爆破速率估计.

在文献[5]中，周军等讨论了下面的退化反应扩散方程

$$\begin{cases} (u^k)_t - \Delta u = u^q \int_0^t u^p \mathrm{d}s & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,\ 0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \tag{5}$$

其中：$0 < k < 1$；$p,\ q \geqslant 0$. 当 $p + q > k$，u_0 足够大时，解在有限时间爆破；当 $p + q \leqslant k$ 时解整体存在.

1 局部存在性与唯一性

为证明方程(1)非负解的存在，给出如下的比较原理.

引理1 令 $b(x,\ t)$ 是定义在 $[0,\ a] \times [0,\ r]$ 上的非负连续函数，其中 $r \in (0,\ T)$. $u(x,\ t) \in C(\overline{\Omega}_r) \cap C^{2,1}(\Omega_r)$ 满足

$$\begin{cases} x^m u_t - (x^r u_x)_x \geqslant \int_0^t b(x,\ s)\, u(x,\ s)\mathrm{d}s & (x,\ t) \in (0,\ a) \times (0,\ T) \\ u(0,\ t) \geqslant 0,\ u(a,\ t) \geqslant 0 & t \in (0,\ T) \\ u(x,\ 0) \geqslant 0 & x \in [0,\ a] \end{cases} \tag{6}$$

则 $u(x,\ t) \geqslant 0$，$(x,\ t) \in [0,\ a] \times [0,\ T)$.

证 首先，类似于文献[6]中引理2.1的证明，用文献[7]中引理2.2.1，有如下结论：

若 $W(x,\ t) \in C(\overline{\Omega}_r) \cap C^{2,1}(\Omega_r)$ 满足

$$\begin{cases} x^m W_t - (x^r W_x)_x \geqslant \int_0^t b(x,\ s) W(x,\ s)\mathrm{d}s & (x,\ t) \in (0,\ a) \times (0,\ r] \\ W(0,\ t) > 0,\ W(a,\ t) \geqslant 0 & t \in (0,\ r] \\ W(x,\ 0) \geqslant 0 & x \in [0,\ a] \end{cases} \tag{7}$$

则 $W(x,\ t) > 0$，$(x,\ t) \in (0,\ a) \times (0,\ r]$. 令 $r' \in (r,\ 1)$，

$$W(x,\ t) = u(x,\ t) + \eta(1 + x^{r'-r})\mathrm{e}^{ct}$$

其中：$\eta > 0$ 足够小，c 是待定正常数. 则 $W(x,\ t)$ 在 Ω_r 的抛物边界上大于0. 在 $(0,\ a) \times (0,\ r]$ 上，设

$$B = \max_{(x,\ t) \in [0,\ a] \times [0,\ r]} b(x,\ t)$$

有

$$x^m W_t - (x^r W_x)_x - \int_0^t b(x,\ s) W(x,\ s)\mathrm{d}s \geqslant \eta\ \mathrm{e}^{ct}\left[c x^m + (r' - r)(1 - r')/x^{2-r'} - \frac{1}{c}(1 + a^{r'-r})B\right]$$

选取 $c \geqslant \dfrac{(1 + a^{r'-r})Ba^{2-r'}}{(r' - r)(1 - r')}$ 则

$$\eta\ \mathrm{e}^{ct}\left[c x^m + (r' - r)(1 - r')/x^{2-r'} - \frac{1}{c}(1 + a^{r'-r})B\right] \geqslant 0$$

故在 $[0,\ a] \times [0,\ r]$ 上，$W(x,\ t) > 0$. 令 $\eta \longrightarrow 0^+$，得到在 $[0,\ a] \times [0,\ r]$ 上，$u(x,\ t) \geqslant 0$. 由 r 的任意性知结论成立.

对于退化方程(1)，考虑在 $C(\overline{\Omega_T}) \cap C^{2,1}(\Omega_T)$ 上的经典解. 由文献[3]中定理2.5，文献[4]中定理2.1，有如下关于(1.1)解的局部存在定理.

定理1 T 是使得方程(1)有非负解的 t 的最大值. 则方程(1)有唯一非负解 $u(x,\ t) \in C([0,\ a] \times [0,\ T)) \cap C^{2,1}[(0,\ a) \times (0,\ T)]$. 若 $T < +\infty$，则

$$\limsup_{t\to T}\max_{x\in[0,a]}|u(x,t)|=+\infty$$

2　解的整体存在性和爆破

讨论 $m>r-1$ 时方程(1) 的解的爆破和整体存在.

首先，下面的特征问题

$$-(x^r\psi'(x))'=1,\ x\in(0,a)\qquad \psi(0)=\psi(a)=0$$

的解是 $\psi(x)=\dfrac{a^{2-r}}{2-r}\left(\dfrac{x}{a}\right)^{1-r}\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$，选取常数 K，令 $\varphi(x)=K\psi(x)$，使得 $\max\limits_{x\in[0,a]}\varphi(x)=1$，于是有下面的整体存在结论.

定理 2　若 $u_0(x)\leqslant c\varphi(x)$，则方程(1) 的解 $u(x,t)$ 整体存在.

证　令 $\bar u=(A+t)^{-\sigma}\varphi(x)$，则有 $\bar u(0,t)=\bar u(a,t)=0$，$t\in(0,T)$. 选择 $(p-1)\sigma>1$，当 A 足够大时，

$$\begin{aligned}&x^m\bar u_t(x,t)-(x^r\bar u_x(x,t))_x-\int_0^t\bar u^p(x,s)\mathrm{d}s\\
=&(A+t)^{-\sigma}[1-x^m\varphi(x)\sigma(A+t)^{-1}]-\varphi^p(x)\left[-\frac{A^{1-p\sigma}}{1-p\sigma}+\frac{(A+t)^{1-p\sigma}}{1-p\sigma}\right]\\
\geqslant&(A+t)^{-\sigma}[1-x^m\varphi(x)\sigma(A+t)^{-1}]-\frac{(A+t)^{1-p\sigma}}{1-p\sigma}\\
\geqslant&(A+t)^{-\sigma}\left[1-x^m\sigma(A+t)^{-1}-\frac{(A+t)^{1-(p-1)\sigma}}{1-p\sigma}\right]\geqslant 0\end{aligned}$$

若 $\bar u(x,0)=A^{-\sigma}\varphi(x)\geqslant u_0(x)$，即 $\bar u(x,t)=(A+t)^{-\sigma}\dfrac{(A+t)^{1-p\sigma}}{1-p\sigma}$ 是方程(1) 的上解. 由文献[3] 的定理 2.5，$T=+\infty$，也即是说 $u(x,t)$ 整体存在.

定理 3　若 $p>1$，当 u_0 足够大时. 则 $u(x,t)$ 在有限时间爆破.

证　设 $V(x,t)=\dfrac{w(x)}{v^q(x,t)}$，$0<x\leqslant a$，$0<t<T$，其中

$$v(x,t)=4T^2-w^\sigma(x)(t-T)^2\qquad v_x=\frac{\pi\sigma(t-T)^2w^{\sigma-1}}{2a}\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$v_{xx}=\frac{\pi^2\sigma(\sigma-1)(t-T)^2w^{\sigma-2}}{4a^2}\sin^2\frac{\pi x}{a}+\frac{\pi^2\sigma(t-T)^2w^{\sigma-1}}{2a^2}\cos\frac{\pi x}{a}$$

$$w(x)=\frac12\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)=\cos^2\frac{\pi r}{2a}\qquad w_x=-\frac{\pi}{2a}\sin\frac{\pi x}{a}\qquad w_{xx}=-\frac{\pi^2}{2a^2}\cos\frac{\pi x}{a}$$

$$MV=x^mV_t-(x^rV_x)_x-\int_0^tV^p\mathrm{d}s$$

$$\leqslant x^m\frac{2qw^{\sigma+1}(t-T)}{V^{q+1}}-rx^{r-1}\frac{w'v-qwv'}{V^{q+1}}-x^r\frac{(w''v+w'v'-qw'v'-qwv'')v-(q+1)(w'v-qwv')v'}{V^{q+2}}$$

选 $\sigma\geqslant 2$，T 足够小，若 $u_0\geqslant V(x,0)=\dfrac{w(x)}{(4-w^\sigma)^qT^{2q}}$，则有

$$x^mV_t-(x^rV_x)_x-\int_0^tV^p\mathrm{d}s\leqslant 0$$

即 $V(x,t)$ 是方程(1) 的爆破下解.

参考文献：

[1]　Chan C Y, Liu Huitian. Global Existence of Solutions for Degenerate Semilinear Parabolic Equations [J]. Nonlinear Anal, 1998, 34(4): 617－628.

[2]　Floater M S. Blow Up at the Boundary for Degenerate Semilinear Parabolic Equations [J]. Arch Rat Mech Anal, 1991,

114(1): 57－77.

[3] Chen Youpeng, Liu Qilin, Xie Chunhong. Blow-Up for Degenerate Parabolic Equations with Nonlocal Source [J]. Pro AMS, 2003, 132(1): 135－145.

[4] Li Yuxiang, Xie Chunhong. Blow-Up for Semilinear Parbolic Equations with Nonlinear Memory [J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik, 2004, 55(1): 15－27.

[5] Zhou Jun, Mu Chunlai, Lv Feng. Blow Up and Global Existence to a Degenerate Reaction Diffusion Equation with Nonlinear Memory [J]. J Math Anal Appl, 2007, 333(2): 1138－1152.

[6] Wang Mingxing, Wang Yuanming. Properties of Positive Solutions for Non-Local Reaction Diffusion Problems [J]. Math Methods in the Applied Science, 1996, 19(14): 1141－1156.

[7] Pao C V. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations [M]. New York: Baker and Taylor Books, 1992: 55.

Blow-up for a Degenerate and Singular Parabolic Equation with Nonlinear Memory

SHI Li-xin

Department of Mathematics, Sichuan Agriculture University, Yaan Sichuan 625014, China

Abstract: This paper deals with the blow-up properties of the solution to the degenerate and singular parabolic equation $x^m u_t - (x^r u_x)_x = \int_0^t u^p \mathrm{d}s$ with non-local memory and homogeneous Dirichlet boundary conditions. The existence of a unique classical nonnegative solution is established and the sufficient conditions for the solution to exist globally or blow up in finite time are obtained.

Key words: degenerate and singular parabolic equation; blow up; nonlinear memory

责任编辑 张 枸