文章编号：1673-9868(2012)11-0108-04

复杂信号瞬时频率的计算①

余　波，　姚　志

三峡大学 理学院，湖北 宜昌 443002

摘要：在严格定义单成分信号瞬时频率的前提下，综合性地定义了复杂信号的瞬时频率，并给出了计算方法.

关　键　词：瞬时频率；Hilbert-Huang 变换；内蕴模态函数

中图分类号：TN911.7　　**文献标志码：A**

在自然界及工业生产中人们经常碰到非平稳信号，如地震波信号、大型电力旋转机械和高压开关设备运行所产生的部分机械振动信号等，其共同特征是存在着变化的频率. 即便是一般的平稳信号，如电压，电流信号，由于受到外界的干扰，其频率也在一定范围内缓慢变化，因此严格而言这些也是非平稳信号. 如何在数学上定义和计算这些非平稳信号的特征频率在理论上和实际应用中都具有重要的意义.

1937 年，研究人员首先在电路理论中提出瞬时频率的概念，并将其应用到通信技术中[1]；1946 年，研究人员给出了经典解析信号的定义[2]，为研究瞬时频率提供了理论基础；最终，研究人员统一了上述研究成果，给出了瞬时频率的经典定义方法[3]，但这种定义只适用于单成分信号. 1998 年，研究人员发展出著名的经验模态分解(Empirical Mode Decomposition)算法，可以将复杂信号分解成少数几个单成分信号，从而使一般信号的瞬时频率的计算成为可能[4]. 经验模态分解算法是近些年来在时频分析方法上的重要突破. 它是一种自适应分析方法，它的分解“基”依赖于信号本身，因此在分析非线性非平稳信号方面具有天然的优势. 它不像传统的傅里叶分析是一种整体变换，要么完全在时域进行，要么完全在频域进行，不具备时间和频率的定位功能；也不像小波方法，需要事先指定小波基，而且与傅里叶变换一样受到不可测原理的制约.

跟单成分信号的瞬时频率不同，目前学界对于一般复杂信号的瞬时频率应该如何定义还存在较多争议. 本文试图在这方面作些尝试. 将假设有一组构成复杂信号的单成分信号，这些单成分信号的瞬时频率都有严格定义，利用希尔伯特变换的线性性质，形式地定义原始复杂信号的瞬时频率并给出计算公式. 本文将在第二部分回顾本文所需的准备知识，在第三部分给出并证明本文的主要结果，最后将总结并展望相关结果.

1　准备知识

传统的频率概念源于针对周期性信号的经典物理学定义，其实质是表示信号在一定时间内的总体特征，一般由傅里叶变换求得. 瞬时频率则是传统频率概念的进一步推广. 有关这方面的详细信息，读者可参考文献[5].

对任意函数 $f \in L^p(R)$，$1 \leqslant p < \infty$，可定义它的希尔伯特变换：

---

① 收稿日期：2012-06-25
基金项目：国家自然科学基金资助项目(60972162；11171181).
作者简介：余　波(1979-)，男，湖北长阳人，博士，讲师，主要从事计算与应用调和分析的研究.

$$(Hf)(t)=p.v.\ \frac{1}{\pi}\int_R\frac{f(s)}{t-s}\mathrm{d}s=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to0^+,\ N\to\infty}\int_{\varepsilon\leqslant|t-s|\leqslant N}\frac{f(s)}{t-s}\mathrm{d}s \tag{1}$$

只要(1)式的主值积分存在.本文的研究兴趣限于 $L^2(R)$ 中的实值函数 f.对实值函数 $f\in L^2(R)$,它所对应的解析信号定义为

$$Af=f+iHf$$

由希尔伯特变换的性质,Af 具有非负频率.Af 的极坐标表示为

$$(Af)(t)=\rho(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}\qquad t\in\mathbb{R} \tag{2}$$

这里,$\rho(t)$ 和 $\theta(t)$,$t\in\mathbb{R}$ 分别定义为信号 f 的瞬时振幅和瞬时相位,θ 的导数 θ' 定义为 f 的瞬时频率.利用欧拉公式 $\mathrm{e}^{i\theta(t)}=\cos\theta(t)+i\sin\theta(t)$,(1)式可重新写为

$$(Af)(t)=\rho(t)[\cos(\theta(t))+i\sin(\theta(t))]\qquad t\in\mathbb{R}$$

这启发我们研究满足

$$H[\rho(\cdot)\cos\theta(\cdot)](t)=\rho(t)\sin\theta(t)\qquad \text{a.e.} \tag{3}$$

的函数对 $\rho(t)$ 和 $\theta(t)$,$t\in\mathbb{R}$.此处a.e.指的是等式在勒贝格测度的意义下几乎处处成立.注意到瞬时振幅和瞬时频率都应该是非负的,要求

$$\text{对任意 } t\in\mathbb{R},\ \rho(t)\geqslant0,\ \theta'(t)\geqslant0 \tag{4}$$

进一步的信息请参考文献[6].基于这些观察,在[7]中,研究人员给出了一些同时满足(3)和(4)的函数对 $\rho(t)$ 和 $\theta(t)$,$t\in\mathbb{R}$.为完备起见,将不加证明地加以引用.

性质1 若 θ 由下式给出

$$\mathrm{e}^{i\theta(t)}=\frac{\mathrm{e}^{i2\arctan t}-\lambda}{1-\lambda\mathrm{e}^{i2\arctan t}}\qquad t\in\mathbb{R}$$

其中 $\lambda\in(0,1)$,则非负平方可积函数 ρ 满足(3)当且仅当其具有以下形式

$$\rho(t)=\frac{c}{1+b^2t^2}\qquad t\in\mathbb{R}$$

其中 $b=(1+\lambda)/(1-\lambda)$,$c$ 为任意非负常数.

如何寻找满足(3)和(4)的其他形式的函数对 $\rho(t)$ 和 $\theta(t)(t\in\mathbb{R})$ 仍然是一个值得研究的问题,但本文不打算进一步讨论这个问题.我们将直接假定有限个函数 $c_k(t)(t\in\mathbb{R})$ 都可表示成 $a_k(t)\cos\theta_k(t)$,其中 $a_k(t)$ 和 $\theta_k(t)$,$t\in\mathbb{R}$ 满足(3)与(4).在此假设下,定义和计算它们的和函数的瞬时频率.

2 复杂信号的瞬时频率

给定一复杂信号 $C(t)$,$t\in\mathbb{R}$,假设其为 n 个单成分信号之和,即:

$$C(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)$$

这里每个 $c_k(t)(t\in\mathbb{R})$ 都可表示成 $a_k(t)\cos[\theta_k(t)](t\in\mathbb{R})$,其中 $a_k(t)$ 和 $\theta_k(t)$,$t\in\mathbb{R}$ 的选择满足(3)和(4),则可得到每个 $c_k(t)$ 所对应的解析信号:

$$\begin{aligned}A_k(t)=&c_k(t)+iH[c_k(\cdot)](t)=\\&a_k(t)\cos[\theta_k(t)]+ia_k(t)\sin[\theta_k(t)]=\\&a_k(t)\mathrm{e}^{i\theta_k(t)}\end{aligned}$$

由希尔伯特变换的线性性质,容易得到原始信号 $C(t)$,$t\in\mathbb{R}$ 所对应的解析信号为

$$\begin{aligned}A(t)=&C(t)+iH[C(\cdot)](t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)+iH[\sum_{k=1}^{n}c_k(t)]=\\&\sum_{k=1}^{n}c_k(t)+i\sum_{k=1}^{n}H[c_k(t)]=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\mathrm{e}^{i\theta_k(t)}=\rho(t)\mathrm{e}^{i\eta(t)}\end{aligned}$$

其中

$$\rho(t)=\{[\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\cos\theta_k(t)]^2+[\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\sin\theta_k(t)]^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

$$\eta(t)=\arctan\left[\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\sin\theta_k(t)}{\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\cos\theta_k(t)}\right] \tag{6}$$

利用(6)式，可以计算原始信号的瞬时频率，即有如下定理.

定理 1　给定 $C(t)\in L^2(R)$. 如果 $C(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\cos\theta_k(t)$，其中 $a_k(t)$ 和 $\theta_k(t)$，$t\in\mathbb{R}$，满足(3)和(4)则 $C(t)$，$t\in\mathbb{R}$ 的瞬时频率为

$$\eta'(t)=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2\theta'_k(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}a_j(t)a_k(t)[\theta'_k(t)+\theta'_j(t)]\cos[\theta_k(t)-\theta_j(t)]}{\sum_{k=1}^{n}a_k^2(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}2a_k(t)a_j(t)\cos[\theta_k(t)-\theta_j(t)]}+$$
$$\frac{\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}[a'_k(t)a_j(t)-a'_j(t)a_k(t)]\sin[\theta_k(t)-\theta_j(t)]}{\sum_{k=1}^{n}a_k^2(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}2a_k(t)a_j(t)\cos[\theta_k(t)-\theta_j(t)]}$$

证　由瞬时频率的定义，只需计算 $\eta(t)$ 的导数. 设

$$P(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\sin\theta_k(t)$$

$$Q(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k(t)\cos\theta_k(t)$$

则

$$\eta'(t)=\frac{P'(t)Q(t)-Q'(t)P(t)}{P^2(t)+Q^2(t)}$$

为了计算 $P'(t)Q(t)$，构造一个向量值函数 $\widetilde{P}'(t)$，定义如下：

$$\widetilde{P}'(t)=\begin{pmatrix}a'_1(t)\sin\theta_1(t)+a_1(t)\theta'_1(t)\cos\theta_1(t)\\ a'_2(t)\sin\theta_2(t)+a_2(t)\theta'_2(t)\cos\theta_2(t)\\ \vdots\\ a'_n(t)\sin\theta_n(t)+a_n(t)\theta'_n(t)\cos\theta_n(t)\end{pmatrix}$$

类似地，定义 $\widetilde{Q}(t)=(a_1(t)\cos\theta_1(t),a_2(t)\cos\theta_2(t),\cdots,a_n(t)\cos\theta_n(t))$，则 $P'(t)Q(t)$ 的计算转换成求矩阵 $\widetilde{P}'(t)\widetilde{Q}(t)$ 所有项的和. 容易得到该矩阵的一般项为

$$a'_k(t)a_j(t)\sin\theta_k(t)\cos\theta_j(t)+a_k(t)a_j(t)\theta'_k(t)\cos\theta_k(t)\cos\theta_j(t)$$

类似地，可以得到矩阵 $-\widetilde{Q}'(t)\widetilde{P}(t)$ 的一般项为

$$-a'_k(t)a_j(t)\cos\theta_k(t)\sin\theta_j(t)+a_k(t)a_j(t)\theta'_k(t)\sin\theta_k(t)\sin\theta_j(t)$$

所以

$$\begin{aligned}&P'(t)Q(t)-Q'(t)P(t)=\\&\sum_{k=1}^{n}a_k^2\theta'_k(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}\{a_j(t)a_k(t)[\theta'_k(t)+\theta'_j(t)]\cos[\theta_k(t)-\theta_j(t)]+\\&[a'_k(t)a_j(t)-a'_j(t)a_k(t)]\sin[\theta_k(t)-\theta_j(t)]\}\end{aligned}$$

而

$$P^2(t)+Q^2(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2(t)+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}2a_k(t)a_j(t)\cos[\theta_k(t)-\theta_j(t)]$$

证毕.

3 总　结

在假定一般复杂信号可表示为单成分信号和的前提下，本文给出了复杂信号瞬时频率的计算公式．从所得到的结果容易看出，通过这种方法所求出的瞬时频率并不能保证恒为非负，因此，如何对相应的单成分信号施加一定条件使得在这种意义下得到非负值频率将是另一个值得研究的问题．这些研究将为复杂信号的分解与表示提供有意义的信息．

参考文献：

[1] CARSON J，FRY T. Variable Frequency Electric Circuit Theory with Application to the Theory of Frequency Modulation [J]. Bell System Tech J，1937，16：513－540.

[2] GABOR D. Theory of Communication [J]. Proc IEE，1946，93：429－457.

[3] VILLE J. Theorie et Application de la Notion de Signal Analytique [J]. Cables et Transmissions，1948，1：61－74.

[4] HUANG N E，SHEN Z，LONG S R，et al. The Empirical Mode Decomposition and the Hilbert Spectrum for Nonlinear and Non-Stationary Time Series Analysis [J]. R Soc Lond Proc Ser A Math Phys Eng Sci，1998，454：903－995.

[5] BOASHASH B. Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal-Partl：Fundamentals [J]. Pro IEEE，1992，80：520－538.

[6] XU Y，ZHANG H. Recent Mathematical Developments on Empirical Mode Decomposition [J]. Advances in Adaptive Data Analysis，2009，1：681－702.

[7] YU B，ZHANG H. The Bedrosian Identity and Homogeneous Semi-Convolution Equations [J]. Journal of Integral Equations and Applications，2008，20(4)：527－568.

On Computing of the Instantaneous Frequency of Complicated Signals

YU Bo，YAO Zhi

College of Science，China Three Gorges University，Yichang Hubei 443002，China

Abstract：Based on a precise definition of instantaneous frequency of single-component signals，this paper introduces a definition of instantaneous frequency of complicated signals，and presents the corresponding computing method for it.

Key words：instantaneous frequency；Hilbert-Huang transform；intrinsic mode function

责任编辑　潘春燕