文章编号：1673－9868(2012)11－0016－06

含参变量的具临界指数的椭圆方程正解的存在性①

王 雄 瑞

宜宾学院 数学学院，四川 宜宾 644007

摘要： 给出了具临界指数的含参量半线性椭圆方程 $-\Delta u = \lambda u + \mu |u|^{2^*-2}u$，$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ 在 $N = 3$ 时的正强解的存在性结论. 特别在参量 $\mu = 1$ 时的结论将 Brezis-Nirenberg 的结论从 $\mathbb{R}^3$ 空间的小球推广到了任意的有界光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

关 键 词： 临界指数；山路引理；极小值原理

中图分类号： O175.25　　**文献标志码：** A

本文拟研究一类具 Sobolev 临界指数的椭圆方程正解的存在性问题. 众所周知，具临界指数的椭圆方程源于物理以及工程乃至几何问题，如气体燃烧理论，几何上著名的 Yamabe 问题，等等. 临界指数的椭圆方程正解的存在性问题与上述实际问题密切相关. 现考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + \mu |u|^{2^*-2}u & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

其中：λ 是实参数，$2^* = \dfrac{2N}{N-2}$ 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ 的临界指数，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$，$N \geqslant 3$ 是一有界开集，且具有光滑边界 $\partial\Omega$. 特别在参量 $\mu = 1$ 时，文献[1] 证明了当 $0 < \lambda < \lambda_1$ 且 $N \geqslant 4$ 时，该 Dirichlet 问题存在一个正解，其中 λ_1 是 $-\Delta$ 的第一特征值. 但是，他们发现 $N = 3$ 与 $N \geqslant 4$ 情况有着本质的差别. 当 $N = 3$ 时他们在文献[1] 中证明，若 Ω 是球，则上述 Dirichlet 问题有一个正解当且仅当 $\lambda \in \left(\dfrac{1}{4}\lambda_1, \lambda_1\right)$. 而对于这么一个开集 $\Omega \in \mathbb{R}^3$，本文将利用山路引理和强极值原理给出该 Dirichlet 问题正解存在结论的一个简单证明.

1 正解存在性结论

定义 1 假设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 上的一有界光滑区域，k 是一非负整数，$0 < \alpha < 1$. 若存在 $B = B(x')$ 以及映射 ψ：$B \longrightarrow \mathbb{R}^N$，$\forall x' \in \partial\Omega$ 使得：

(a) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^N$；

(b) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^N$；

(c) ψ：$B \longrightarrow D = \psi(B)$ 是单射，且 $\psi \in C^{k,\alpha}(B)$，$\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

则称 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 中的一 $C^{k,\alpha}$ 区域.

---

① 收稿日期：2011－01－06

基金项目：四川省科技厅自然科学基金资助项目(2011JYZ010)；四川省教育厅自然科学基金资助项目(11ZA172)；宜宾学院重点项目基金资助(2010Z03).

作者简介：王雄瑞(1965－)，男，四川仪陇人，副教授，主要从事非线性分析的研究.

本文假设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一 $C^{2,\alpha}$ 区域，λ_1 是 $-\Delta$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中的第一特征值，其范数 $\|u\|=(\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$. 记 $\|u\|_{L^p}=(\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x)^{\frac{1}{p}}$ 为空间 $L^p(\Omega)(p>1)$ 的范数，$\rightharpoonup$ 为弱收敛号. $2^*=6$ 是 $\Omega\in\mathbb{R}^3$ 时的 Sobolev 临界指数.

由文献 [2－3] 知，特征值 λ_1 对应的特征函数的空间 $E(\lambda_1)$ 的维数是1，并且存在一个正的特征函数. 不妨设 $e_1\in E(\lambda_1)$ 满足 $\|e_1\|_{L^6}=1$ 以及 $e_1(x)>0$，$\forall x\in\Omega$. 为了获得正的强解，我们需要以下引理：

引理1(正则性定理)[4-5]　假设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一 $C^{2,\alpha}$ 区域，$f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 满足

(f_1) $f(x,t)\in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}\times[-M,M],\mathbb{R})$，$\forall M>0$；

(f_2) 存在非零常数 a_0 使得 $\lim\limits_{|t|\to\infty}\dfrac{f(x,t)}{t^{2^*-1}}=a_0$；

(f_3) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,t)}{t}=a(x)\in L^\infty(\Omega)$.

则 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}-\Delta u=f(x,u) & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

的弱解必是强解.

引理2(强极值原理)[4-5]　设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 的一有界区域，$c(x)\in C^0(\Omega)$，且 $c(x)\geqslant 0$，$\forall x\in\Omega$，$u\in C^0(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，满足

$$\begin{cases}-\Delta u+c(x)u\geqslant 0 & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

且在 Ω 上 $u(x)\not\equiv 0$，则 $u(x)>0$，$\forall x\in\Omega$.

引理3[4-5]　若 $u\in H_0^1(\Omega)$，则 $u^+,u^-,|u|\in H_0^1(\Omega)$，且：若 $\nabla u^+=\nabla u$，则 $u>0$；若 $\nabla u^+=0$，则 $u\leqslant 0$；若 $\nabla u^-=0$，则 $u\geqslant 0$；若 $\nabla u^-=\nabla u$，则 $u<0$；若 $\nabla|u|=\nabla u$，则 $u>0$；若 $\nabla|u|=0$，则 $u=0$；若 $\nabla|u|=-\nabla u$，则 $u<0$.

受到文献[1－10]相关结论与方法的启发，本文利用引理1－3以及(没有 Palais-Smale 条件的)山路引理，给出以下主要结论：

定理1　设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的一 $C^{2,\alpha}$ 区域，则对任意 $\lambda\in(\lambda_0,\lambda_1)$，存在只与 Ω 相关的一常数 λ_0 使得 Dirichlet 问题：

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u+\mu u^5 & x\in\Omega\\ u(x)>0 & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

至少存在一强解，其中 $\mu\geqslant 1$ 是任意给定的参数，

$$\lambda_0=\max\left\{0,\ \lambda_1-\frac{S}{\|e_1\|_{L^2}^2}\right\}=\max\left\{0,\ \frac{\|e_1\|^2-S}{\|e_1\|_{L^2}^2}\right\}\tag{2}$$

S 是 Sobolev 嵌入 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^6(\Omega)$ 的最佳常数，与 Ω 的选择无关.

2　定理1的证明

对任给 $u\in H_0^1(\Omega)$，令

$$u^+=\max\{u,0\}\qquad u^-=\min\{u,0\}$$

则由引理2.3知 u^+，$u^-\in H_0^1(\Omega)$. 设

$$J(u)=\int_\Omega\left\{\frac{|\nabla u|^2+\mu u^2-\mu(u^+)^2}{2}-\frac{1}{6}(u^+)^6-\frac{1}{2}\lambda(u^+)^2\right\}\mathrm{d}x$$

这里 $\mu>0$. 不难证明 $J\in C^1(H_0^1(\Omega),\mathbb{R})$. 下证明 J 满足山路引理的条件.

引理 4　对任给 $0<\lambda<\lambda_1$ 以及 $\mu>0$，变分泛函 J 满足山路几何条件，即 $J(0)=0$，此外，存在 $\rho>0$ 以及 $\alpha_0>0$ 使得

$$J(u)\mid_{\partial B_\rho(0)}\geqslant\alpha_0>0 \tag{3}$$

存在 $e\in H_0^1(\Omega)$ 满足 $e\notin B_\rho(0)$，以及

$$J(e)\leqslant 0 \tag{4}$$

其中 $B_\rho(0)=\{u\in H_0^1(\Omega)\mid\ \|u\|\leqslant\rho\}$.

证　显然 $J(0)=0$，且

$$J(u)\geqslant\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\mid\nabla u\mid^2-\frac{1}{6}\mu(u^+)^6-\frac{1}{2}\lambda(u^+)^2\right\}\mathrm{d}x\geqslant\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\mid\nabla u\mid^2-\frac{1}{6}\mu\mid u\mid^6-\frac{1}{2}\lambda u^2\right\}\mathrm{d}x \tag{5}$$

由 λ_1 的定义有

$$\int_\Omega\mid\nabla u\mid^2\mathrm{d}x\geqslant\lambda_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x\qquad\forall\, u\in H_0^1(\Omega) \tag{6}$$

由 Sobolev 嵌入定理知，存在正的常数 $c=S^{-\frac{1}{2}}$ 使得

$$\|u\|_{L^6}\leqslant c\|u\|\qquad\forall\, u\in H_0^1(\Omega) \tag{7}$$

由 (5)－(7) 式有

$$J(u)\geqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2-\frac{1}{6}c^6\mu\|u\|^6$$

由此易知(3) 式成立.

又当 $t\to+\infty$ 时，

$$J(te_1)=\frac{t^2}{2}\|e_1\|^2-\frac{t^6}{6}\mu\|e_1\|_{L^6}^6-\frac{\lambda}{2}t^2\|e_1\|_{L^2}^2=\frac{\lambda_1-\lambda}{2}\|e_1\|_{L^2}^2t^2-\frac{1}{6}t^6\mu\to-\infty \tag{8}$$

那么由(8) 式知，存在 $t_0>0$ 使 $B_\rho(0)\not\ni e=t_0e_1$ 满足(4) 式.

设

$$c_0=\inf_{\tau\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J(\tau(t)) \tag{9}$$

其中 ρ,α_0 和 $e=t_0e_1$ 都由引理 4 给出，$\Gamma=\{\tau\in C([0,1],H_0^1(\Omega))\mid\tau(0)=0,\tau(1)=e\}$. 则由引理 4 及山路引理，存在序列$\{u_k\}\subset H_0^1(\Omega)$ 使得：当 $k\to\infty$ 时，有

$$J(u_k)\to c_0 \tag{10}$$

$$J'(u_k)\to 0\qquad\text{in }(H_0^1(\Omega))^* \tag{11}$$

引理 5　满足(10) 和(11) 式的序列$\{u_k\}$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中有界.

证　由(10) 和 (11) 式知，当 k 充分大时，

$$\int_\Omega\left\{\frac{\mid\nabla u_k\mid^2+\mu u_k{}^2-\mu(u_k{}^+)^2}{2}-\frac{1}{6}\mu(u_k{}^+)^6-\frac{1}{2}\lambda(u_k{}^+)^2\right\}\mathrm{d}x=c_0+o(1) \tag{12}$$

$$\langle J'(u_k),u_k\rangle=\int_\Omega\{\mid\nabla u_k\mid^2+\mu u_k{}^2-\mu(u_k{}^+)^2-\mu(u_k{}^+)^6-\lambda(u_k{}^+)^2\}\mathrm{d}x \tag{13}$$

$$\|J'(u_k)\|_{(H_0^1(\Omega))^*}<\varepsilon \tag{14}$$

对任给常数 $s\in(2,6)$，由(12)－(14) 式有

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)\int_\Omega\{\mid\nabla u_k\mid^2+\mu u_k{}^2-\mu(u_k{}^+)^2-\lambda(u_k{}^+)^2\}\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{6}\right)\mu\int_\Omega(u_k^+)^6\mathrm{d}x\leqslant c_0+o(1)+\frac{\varepsilon}{s}\|u_k\| \tag{15}$$

由于

$$\int_\Omega\{\mid\nabla u_k\mid^2-\lambda u_k{}^2\}\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega\{\mid\nabla u_k\mid^2+\mu u_k{}^2-\mu(u_k{}^+)^2-\lambda(u_k{}^+)^2\}\mathrm{d}x$$

则由(15) 式有

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)\int_{\Omega}\{|\nabla u_k|^2-\lambda u_k{}^2\}\mathrm{d}x\leqslant c_0+o(1)+\varepsilon\|u_k\|$$

再由(6)式有

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s}\right)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u_k\|^2\leqslant c_0+o(1)+\varepsilon\|u_k\|$$

从而$\{u_k\}$在$H_0^1(\Omega)$中有界.

定理 1 的证明　由引理 5，Sobolev 嵌入定理与$H_0^1(\Omega)$的弱紧性知，存在子列$\{u_k\}$(为方便起见，不妨仍设为$\{u_k\}$，下文同)使当$k\to\infty$时有

$$\begin{cases}u_k\rightharpoonup u_0 \text{ in } H_0^1(\Omega)\\ u_k\longrightarrow u_0 \text{ in } L^2(\Omega)\end{cases}\tag{16}$$

设

$$g(x,u)=\lambda u+\mu u^5+\mu u\tag{17}$$

显然存在常数$s_0>0$使得

$$|g(x,u^+)|\leqslant s_0(1+(u^+)^5)\leqslant s_0+s_0(u^+)^5$$

又

$$\|u^+\|_{L^6}^2\leqslant\|u\|_{L^6}^2\leqslant S^{-1}\|u\|^2$$

则由 Caratheodory 算子$\mathscr{A}$: $u(x)\longrightarrow g(x,u(x))$是$L^6(\Omega)$到$L^{6'}(\Omega)$中的有界连续算子知，$\{g(x,u_k{}^+)\}$在$L^{6'}(\Omega)$上有界. 这里$6'=\dfrac{6}{5}$. 从而存在子列使得

$$g(x,u_k{}^+)\rightharpoonup g(x,u_0^+) \text{ in } L^{6'}(\Omega)\tag{18}$$

则由 Sobolev 嵌入定理以及(16)-(18)式有，当$k\to\infty$时

$$\int_{\Omega}\{\nabla u_k\nabla\theta+\mu u_k\theta-\mu(u_k{}^+)\theta-\mu(u_k{}^+)^5\theta-\lambda(u_k{}^+)\theta\}\mathrm{d}x\to$$

$$\int_{\Omega}\{\nabla u_0\nabla\theta+\mu u_0\theta-\mu(u_0^+)\theta-\mu(u_0^+)^5\theta-\lambda(u_0^+)\theta\}\mathrm{d}x\qquad\forall\theta\in H_0^1(\Omega)\tag{19}$$

又由(11)式知，对任意给定的$\theta\in H_0^1(\Omega)$，若$k\to\infty$，则

$$0\leqslant|\langle J(u_k),\theta\rangle|\leqslant\|J'(u_k)\|_{(H_0^1(\Omega))^*}\|\theta\|\to 0$$

从而由(19)式有

$$\int_{\Omega}\{\nabla u_0\nabla\theta+\mu u_0\theta-\mu(u_0^+)\theta-\mu(u_0^+)^5\theta-\lambda(u_0^+)\theta\}\mathrm{d}x=0\qquad\forall\theta\in H_0^1(\Omega)\tag{20}$$

特别在上式中取$\theta=u_0{}^-$，则由引理 4 可得

$$\int_{\Omega}\{|\nabla u_0{}^-|^2+\mu(u_0{}^-)^2\}\mathrm{d}x=0$$

从而

$$u_0{}^-(x)=0,\ \text{a. e.}\qquad x\in\Omega$$

则

$$u_0(x)=u_0^+(x)\geqslant 0,\ \text{a. e.}\qquad x\in\Omega$$

则由(20)式得

$$\int_{\Omega}\{\nabla u_0\nabla\theta-\mu u_0^5\theta-\lambda u_0\theta\}\mathrm{d}x=0\qquad\forall\theta\in H_0^1(\Omega)$$

即u_0是以下 Dirichlet 问题在$H_0^1(\Omega)$中的非负解.

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda u+\mu u^5 & x\in\Omega\\ u=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{21}$$

接着断言$u_0(x)\not\equiv 0$. 下用反证法证明.

事实上，若 $u_0(x)=0$，a. e. $x\in\Omega$. 则由(16)式知，当 $k\to\infty$ 时

$$\int_\Omega u_k{}^2\mathrm{d}x\to\int_\Omega u_0{}^2\mathrm{d}x=0 \tag{22}$$

因此由 $\int_\Omega(u_k^+)^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega u_k{}^2\mathrm{d}x$ 可得，若 $k\to\infty$，则

$$\int_\Omega(u_k^+)^2\mathrm{d}x\to 0 \tag{23}$$

由引理 5 知 $\{\|u_k\|^2\}$ 是有界实数列，从而存在强收敛子列以及一个常数 $l\geqslant 0$ 使得若 $k\to\infty$，则

$$\|u_k\|^2\to l \tag{24}$$

由(11),(13),(22)—(24)式知，若 $k\to\infty$，则

$$\mu\int_\Omega(u_k^+)^6\mathrm{d}x\to l \tag{25}$$

由(22)—(25)式知，若 $k\to\infty$，则

$$J(u_k)\to\frac{l}{2}-\frac{l}{6}=\frac{l}{3}$$

由 c_0 的定义知 $c_0\geqslant\alpha_0>0$. 从而由(10)式知 $l>0$. 由(7)式知

$$S\|u_k{}^+\|_{L^6}^2\leqslant S\|u_k\|_{L^6}^2\leqslant\|u_k\|^2$$

上式中让 $k\to\infty$ 则 由(23)和(24)式有

$$Sl^{\frac{2}{6}}\leqslant l\text{ 或 }S\leqslant l^{\frac{2}{3}} \tag{26}$$

则由(10)和(26)式知

$$c_0\geqslant\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}} \tag{27}$$

另一方面，由(9),(3),(8)式以及 $J(0)=0$，考察函数曲线性状，并经过精确计算可得

$$c_0\leqslant\sup_{t\geqslant 0}J(te_1)=\max_{t\geqslant 0}J(te_1)=J(t_1e_1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}}(\lambda_1-\lambda)^{\frac{3}{2}}\|e_1\|_{L^2}^3 \tag{28}$$

其中 $t_1=\left\{\frac{1}{\mu}(\lambda_1-\lambda)\|e_1\|_{L^2}^2\right\}^{\frac{1}{4}}$. 由(28)式知

$$c_0<\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mu}}\cdot S^{\frac{3}{2}}\leqslant\frac{1}{3}S^{\frac{3}{2}}$$

这就直接与(27)式矛盾，从而证明了断言

$$u_0(x)\not\equiv 0 \tag{29}$$

由正则性引理（即引理 1），u_0 必是 Dirichlet 问题（21）的强解. 显然

$$-\Delta u_0+\mu u_0=\lambda u_0+\mu u_0{}^5+\mu u_0\geqslant 0,\ x\in\Omega$$

即

$$\begin{cases}-\Delta u_0+\mu u_0\geqslant 0 & x\in\Omega\\ u_0(x)=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

由(29)式，强极值原理（引理 2）以及上式，u_0 也是问题(1)的强解.

注　(a)(2)式中的 λ_0 与参数 μ 及 λ 均无关，只可能与 Ω 的选择有关.

(b)特别地，当 $\mu=1$ 时，定理 1 将 Brezis-Nirenberg 的相应结论从 $\mathbb{R}^3$ 的小球推广到任意有界光滑区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$.

参考文献：

[1] BREZIS H, NIRENBERG L. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Criticial Sobolev Exponents [J]. Comm Pure Appl Math, 1983, 36: 437—477.

[2] ANANE A. Simplicite et Isolation de la Premiere Valeur Propre du p-Laplacian Avec Poids [J]. C R Hebd Seanc Acad Sci Paris ser I Math, 1987, 305: 725-728.

[3] LINDQVISE P. On the Equation $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda|u|^{p-2}u=0$ [J]. Proc Amer Math Soc, 1990, 109: 159-164.

[4] AMBROSETTI A, ROBINOWITZ P H. Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications [J]. J Funct Anal, 1973, 14: 349-381.

[5] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[6] 饶若峰，何庆高. 涉及无限族严格伪压缩映象的广义混合平衡问题的混合迭代算法 [J]. 西南大学学报：自然科学版，2009，31(12)：143-147.

[7] 饶若峰，黄家琳. 涉及 Sobolev 临界指数和临界维数椭圆边值问题正解的存在性 [J]. 吉林大学学报：理学版，2008，46(3)：423-427.

[8] 饶若峰. 带误差的合成隐迭代新算法 [J]. 数学物理学报，2009，29A(3)：823-831.

[7] 毛建树. Banach 空间中一类新的完全广义非线性拟似变分包含的 Ishikawa 型迭代算法 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2009，34(1)：28-34.

[9] 饶若峰. 一类含第一特征值具临界指数的半线性椭圆方程 [J]. 西南师范大学学报：自然科学版，2004，29(4)：549-552.

[10] 饶若峰. 严格渐进伪压缩映象之修正型 Mann 迭代算法的强收敛性 [J]. 数学进展，2010，39(3)：283-288.

Existence of Positive Solutions for Parametric Equations with Critical Sobolev Exponent

WANG Xiong-rui

Department of Mathematics, Yibin University, Yibin Sichuan 644007, China

Abstract: In this paper, the author gives a simple proof of the existence of a positive strong solution for the parametric semilinear elliptic equation $-\Delta u=\lambda u+\mu|u|^{2^*-2}u$ with the Sobolev exponent $2^*=\dfrac{2N}{N-2}=6$ in the case of $N=3$. Particularly, the main result obtained in the case of the parameter $\mu=1$ expends the corresponding result of Brezis and Nirenberg from a ball of R^3 to an arbitrary bounded smooth domain $\Omega\subset R^3$.

Key words: critical exponent; mountain-pass lemma; minimum theorem

责任编辑 张 构