*

多主体自认知逻辑系统

董 英 东

(南开大学 哲学系,天津市 300071)

摘　要:认知逻辑处理的是关于知识和信念等认知概念的逻辑性质和关系的问题,多主体的自认知逻辑系统,是在单主体唯一知道逻辑系统的基础上进行的扩充。现将单主体的 K45 系统扩充为多主体的 K45n 系统,并介绍了该系统的语法规则和稳定集以及典范模型的语义和证明理论,同时也对该系统的可靠性和完全性进行了证明。

关键词:稳定集;自认知逻辑;非单调推理;i－集

中图分类号:B815.3　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1673-9841(2009)05-0071-05

莱维斯克(Levesque)介绍了“唯一知道”的概念,他的目的是为了刻画某种类型的非单调逻辑推理。莱维斯克的逻辑系统处理的仅仅是单主体的情况。多主体自认知逻辑和单主体自认知逻辑的区别是在客观公式中增加了其他主体的信念,该主体可以对其他主体的信念进行内省,至于其他主体是否知道或相信该主体的信念,则是不去考虑的。在许多这样的非单调推理的利用上,可能会存在有多个主体。在直觉上“我全知道”(“唯一知道”)的概念的直接含义是:在每一个克里普克 Kripke 模型中,一个主体考虑的是大量的其他的可能世界。在这种情况下,单主体的知识满足 K45 系统,我们可以通过一个真值指派来确定一个世界,用真值指派集来确定一个模型。主体所考虑的可能世界越多,他知道的就越少。但是,我们知道有时候智能主体需要对其他主体进行推理,这时就需要有多主体的自认知逻辑系统,此时我们就需要提供 n 个主体的模态逻辑,此时我们就可以表达“主体 i 全知道”,而此时主体 i 的信念之中就包括了其他主体的信念。而自认知逻辑是认知逻辑的一个部分,它刻画的是每一个主体具有一个最小的信念集合,而且该主体对他的信念集合具有内省能力,即他知道他所知道的,也可以知道他所不知道的。而认知逻辑则没有这个限制(可以不具有内省力)。多主体认知逻辑可以刻画多个主体之间的互知,而多主体自认知则不具有这个能力,他只是将其他人的信念作为自己的客观公式来进行处理,可以对其他人的信念进行推理。下面我们就用 K45n 来刻画多主体自认知逻辑系统。

一、K45n 的基本思想

我们如何将单主体自认知逻辑扩充为多主体的情况呢?首先将语言 ONL(Φ)扩充为多主体的情况。也就是说,现在开始考虑 ONL_n(Φ)语言,对每一个主体 i,$1\leqslant i\leqslant n$ 除了存在有算子 L_i 和 N_i 之外,对于确定的 n,都类似于 ONL(Φ)语言。我们可以省略 Φ,仅将其写为 ONL 和 ONL_n。参照单主体的情况,我们也规定了主观公式和客观公式。例如,从主体 1 的观点来看,公式 L_2p 或者 L_2L_1p 正好类似于命题公式是“客观的”。如果一个公式是命题公式和形如 $L_j\Phi$ 和 $N_j\Phi$,$j\neq i$ 这种形式的公式的复合,其中 Φ 是任意的,我们称该公式为 i－客观的。这样,$q\wedge N_2L_1p$ 是 1－客观的,但 L_1p 和 $q\wedge L_1p$ 就不是。下面将对其进行详细的阐述。

在单主体的情况下,莱维斯克利用 K45 的语义,存在有一个非常简单的公式集。在那里存在有一个固定的世界集,它是由所有的真值指派所组成的集合。一个情境就是由所有的 w 世界组成的,它对应于我们直觉上的现实世界,并且有一个世界集 w',它是由主体的信念所决定的。不需要存在有一个明确的可及关系,因为在 M 中的世界全部都有一个可及的世界,并且一个命题被相信仅仅因为它在 W 中所有的世界中都是真的。遗憾的是,这样一个简单的情

* 收稿日期:2009-05-07

作者简介:董英东(1971-),男,天津市人,南开大学哲学系,博士研究生,主要研究逻辑哲学和哲学逻辑。

境不能扩充到多主体的情况，而我们需要更加复杂的语义和我们上面所定义的可及关系相对应。

在此，我们采用的模型是克里普克[1]［Kripke 1963］模型，也就是说用世界和可及关系来刻画在每一个世界里主体所认为是可能的那些世界。形式上，一个 Kripke 结构或模型是一个多元组 $M=(W,\pi,K_1,\cdots,K_n)$，其中 W 是一个世界集，π 是在每一个世界中给原子命题指派一个真值。对每一个世界 w 和原子命题 p，使得 $\pi(w)(p)\in\{1,0\}$，并且 K_i 是指主体 i 的二元的可及关系。K_i^M 表示的是在模型 M 中和主体 i 具有 K_i 可及关系。类似地，我们可以用 W^M，π^M 分别表示在模型 M 中的世界和在模型 M 中的赋值。在一般的情况下，我们通常省略 M。给定这样的一个 Kripke 模型 M，令 $K_i^M(w)=\{w'\mid(w,w')\in K_i\}$，$K_i^M(w)$是由主体 i 在模型 M 里在 w 中认为是可能的世界所组成的集合。像通常一样，我们定义[2]：

定义 1　一个模态算子在公式 α 中出现的深度是 n，当且仅当它出现在正好 n 个模态算子的辖域之内。

例如：给定公式 $\alpha=p\wedge L_1L_2(L_3q\vee\neg O_2r)$，则 L_1 出现的深度为 0，L_2 出现的深度为 1，L_3 和 O_2 出现的深度都是 2。

定义 2　公式 α 被称为是 i－客观的（对于 $i=1,\cdots,n$），当且仅当，每一个形如 O_j 或者 L_j 开头的模态算子的深度为 0（其中 $i\neq j$）。（可以是命题公式或者是 O_j 或者 L_j 前面不含模态算子的公式，相对于 i 来说是客观的，其中 $i\neq j$）

换句话说，从主体 i 的观点考虑，i－客观公式讨论的是外部世界；它包括了其他主体的信念但不包括它自己的信念。例如：$(p\vee L_2q)\wedge\neg O_3L_1p$ 是 1－客观的，而$(p\vee L_2q)\wedge\neg L_1O_3p$ 就不是。

定义 3　公式 α 被称为是 i－主观的，当且仅当，每一个形如 L_i 或者 O_i 开头的模态算子的深度为 0，并且每一个原子命题都出现在模态算子的辖域之内。

也就是说，i－主观公式讨论的仅是主体 i 所相信的。例如 $L_1p\wedge\neg O_1p$ 是 1－主观的，而 $L_1p\wedge q$ 和 $L_1p\wedge L_2q$ 就不是。

定义 4　典范模型(K45n)　$M^c=(W^c,\pi^c,K_1{}^c,\cdots,K_n{}^c)$可以定义如下：

(a)$W^c=\{w\mid w$ 是由基本公式组成的极大一致集，记作 K45n$\}$。

(b)对所有的原子命题 p 和 $w\in W^c$，$\pi(w)(p)=1$，当且仅当 $p\in w$。

(c)$(w,w')\in K_i{}^C$ 当且仅当 $w/L_i\subseteq w'$，其中 $w/L_i=\{\alpha\mid L_i\alpha\in w\}$

在典范模型的方法下的有效性被定义为仅和典范模型相对应，更严格地说，一个公式 α 被认为是在典范模型的方法下有效的，记$\models^c\alpha$，当且仅当 $M^c\models\alpha$，也就是说，如果在典范模型中对所有的世界 w，我们都有$(M^c,w)\models\alpha$。

给定一个情境(M，w)，令 $obj_i(M,w)$是由在(M，w)里是真的所有的 i－客观的基本公式组成。我们把 $obj_i(M,w)$看作是主体 i 在(M，w)上的状态。注意 $obj_i(M,w)$是由 i－客观基本公式组成的极大一致集。因此我们从现在起用“i－集”来代替“i－客观基本公式的极大集”。这样，对于主体 i 来说可了解的状态集就是由所有的 i－集组成的集合。注意可了解的状态集是独立于模型的。因此，我们就可以证明它是对单主体情况的一种概括。因此在单主体的情况下，i－客观基本公式正好是命题公式，并且一个 i－集可以通过真值指派来确定。

为此，我们需要一些预备的结果和定义。

定义 5　给定一个情境(M，w)，规定 $Obj_i(M,w)=\{obj_i(M,w')\mid w'\in K_i{}^M(w)\}$，因此，$Obj_i(M,w)$就是指在情境(M，w)中主体 i 认为是可能的 i－集的集合。规定 $subj_i(M,w)=\{$基本 $L_i\alpha\mid(M,w)\models L_i\alpha\}\cup\{$基本 $\neg L_i\alpha\mid(M,w)\not\models L_i\alpha\}$。因此，$subj_i(M,w)$就刻画了主体 i 的基本信念。

引理 1　令 w 和 w′是 M^c 中的世界，那么 $w\approx_i w'$当且仅当主体 i 在 w 和 w′中有同样的基本信念，也就是说 $subj_i(M^c,w)=subj_i(M^c,w')$。

下面，我们不再把重点放在典范模型的方法上，我们考虑的是所有的 Kripke 模型。

我们采用像下面的这种方法来定义新的语义$\models'$：

$(M,w)\models' N_i\varphi$，当且仅当，$(M',w')\models'\varphi$，对所有的情境(M',w')使得 $Obj_i(M,w)=Obj_i(M',w')$并且 $obj_i(M',w')\notin Obj_i(M,w)$。

注意$\models$和$\models'$在基本公式上是相同的；一般地，我们将会看到，它们是有区别的。我们说这种定义是和哈尔彭[3]［Halpern 1993］中给出的是等价的。我们在这里不再重复它里面介绍过的关于 i－客观的树的概念，因为该结果得自于(Halpern 1993，94)的 i－集是等价于 i－客观树的结论：每一个 i－集都一致地由一个 i－客观树来决定，反之亦然。

令 $obj_i{}^+(M,w)$由所有的在情境(M，w)中和$\models'$相对应的是真的 i－客观公式集（不必然仅是 i－客观基本公式）组成，并且令 $Obj_i{}^+(M,w)=\{obj_i{}^+(M,w')\mid w'\in K_i{}^M(w)\}$。

定理 2　令 Γ 是一个可满足的 i－客观公式集，令 S_i 是一个极大可满足的 i－客观公式集，$i=1,\cdots,n$，令 Σ 是可满足的 i－主观公式集，并且令 σ 是命题公式。那么：

(a)存在一个情境(M_1,w_1)使得 $\Gamma\subseteq obj_i^+(M_1,w_1)$并且 $S_i=Obj_i^+(M_1,w_1)$

(b)存在一个情境(M_2,w_2)使得$(M_2,w_2)\models\sigma$ 并且 $Obj_j^+(M_2,w_2)=S_j,j=1,\cdots,n$。

(c)存在一个情境(M_3,w_3)使得$(M_3,w_3)\models\Gamma\wedge\Sigma$

引理 3　假设 Γ 是仅由 i－客观公式组成的，Σ 仅由 i－主观的基本公式组成的，并且 Γ 和 Σ 都是 K45n 一致的，那么 $\Gamma\cup\Sigma$ 是 K45n 一致的。

我们现在能够证明关于主体 i 的可以了解的状态集和所有的典范模型的世界是相同的，这可以从下面的结果中得到：

定理 4　令 $w\in W^c$。那么对于每一个 i－集 Γ 正好存在一个世界 w^*，使得 $obj_i(M^c,w^*)=\Gamma$，并且 $w\approx_i w^*$。

定义 6　如果对于每一个有穷的 Γ 的子集$\triangle$，都存在一个集合 $\Gamma'\in S$ 使得$\triangle\subset\Gamma'$，那么我们就说该 i－集 Γ 是 i－集 S 受限的集合。如果每一个受限的 S 都在 S 内，那么我们就说由 i－集组成的集合 S 就是有限封闭的。

引理 5　对于每一个在 M^c 中的世界 w，集合 $Obj_i(M^c,w)$是有限封闭的。

定理 6　如果 $p\in\Phi$ 并且 $i\neq j$，那么$\models^c\neg O_i\neg O_j p$。

我们首先需要一个定义和一个引理。如果既推不出 $\vdash_{K45}\varphi\rightarrow\psi$ 成立，也推不出 $\vdash_{K45}\varphi\rightarrow\neg\psi$ 成立，那么我们就说一个基本公式 ψ 相对于一个基本公式 φ 来说是 K45－独立的。

引理 7　如果 $n\geqslant2$(也就是至少存在两个主体)，并且 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$ 是一致的基本的 i－客观公式，那么就存在有形式为 $L_i\psi'$的基本的 i－客观公式 ψ，独立于每一个 $\varphi_1,\cdots,\varphi_m$。

二、i－稳定集和 i－稳定集的扩充

众所周知，在单主体的情况下，一个稳定集就是在一些情境下由主体 i 所能够知道的全部公式所组成的集合。也就是说，集合 S 是稳定的，当且仅当，存在有一个情境(W,w)使得 $S=\{\alpha|(W,w)\models La\}$。在直觉上我们希望将它扩充为一个多主体集，其中和它对应的基本的语言就是现在的 ONL_n。首先，我们用一般的方法在扩充的典范模型中来定义逻辑后承：如果 Γ 是一个公式集，对每一个公式 $\gamma'\in\Gamma$，如果 $M^e\models\gamma'$，就将它记作：$M^e\models\Gamma$。此时就称 γ 是 Γ 的 e－后承。并且记作 $\Gamma\models^e\gamma$，确切地说，如果 $M^e\models\Gamma$，可以推出 $M^e\models\gamma$。

定义 7　令 Γ 是由在 ONL_n 中的公式所组成的集合，Γ 被称为是 i－稳定的，当且仅当，

(a)如果 $\Gamma\models^e\gamma$，那么 $\gamma\in\Gamma$，

(b)如果 $\alpha\in\Gamma$，那么 $L_i\alpha\in\Gamma$，

(c)如果 $\alpha\notin\Gamma$，那么 $\neg L_i\alpha\in\Gamma$

定理 8　令 Γ 是 ONL_n－公式集。Γ 是 i－稳定的，当且仅当，Γ 是一个 i－认知状态(i－epistemic state)。

在单主体的情况下，摩尔定义了由 Th 公式组成的集合的稳定扩充的理论。直觉上，Th 的稳定扩充是包含了 Th 以及由所有被相信的公式所组成的稳定的集合。我们在此直接给出了多主体的情况下的对摩尔概念的概括。

定义 8　令 Th 是一个 ONL_n－公式集，Γ 被称为是 Th 的 i－稳定的扩充，当且仅当，$\Gamma=\{\gamma\in ONL_n|Th\cup L_i\Gamma\cup\neg L_i\overline{\Gamma}\models^e\gamma\}$。

由此可见，i－稳定的扩充就是一个 i 稳定集。我们除了用 e－后承来代替重言式后承外，该 i－稳定扩充的定义完全类似于摩尔的稳定扩充的定义。当在稳定集的情况下，必须刻画这样的事实，在扩充的典范模型的语义下，公共知识就是所有的主体都具有推理能力。

现在利用莱维斯克研究的结果(他证明了单主体的情况)，证明 i－稳定扩充的公式 α 正好对应于不同的情境，其中主体 i 唯一知道 α。我们首先需要一个引理。

引理 9　令(M^e,w)是一个情境且 $\Sigma=\{L_i\gamma|(M^e,w)\models L_i\gamma\}\cup\{\neg L_i\gamma|(M^e,w)\models\neg L_i\gamma\}$。

对于任意的 α，存在有一个 i－客观公式 α^*，使得：

(a)$\Sigma\models^e\alpha\leftrightarrow\alpha^*$

(b)$(M^e,w)\models(L_i\alpha\leftrightarrow L_i\alpha^*)\wedge(N_i\alpha\leftrightarrow N_i\alpha^*)$

定理 10　令 w 是在扩充的典范模型中的世界，并且令 Γ 是对应于情境(M^e,w)的 i－认知状态。那么，对于每一个 ONL_n－公式 α，我们有$(M^e,w)\models O_i\alpha$ 当且仅当

(a)Γ 是一个 i－稳定的$\{\alpha\}$的扩充并且

(b)$K_i^e(w)$和 $N_i^e(w)$是互不相交的。

三、证明理论

我们现在来考虑该语言的公理化系统。下面的公理化系统中的公理 A5，采用 K45n 一致性来代替纯

命题的一致性，其余的公理都类似于莱维斯克的公理系统。为了便于说明，我们对该公理采用了和单主体的情况相同的名字并用下标 n 来强调我们所做的是多主体的情况。

公理：

A1n　所有命题逻辑的公理

A2n　$L_i(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(L_i\alpha\rightarrow L_i\beta)$

A3n　$N_i(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(N_i\alpha\rightarrow N_i\beta)$

A4n　$\sigma\rightarrow L_i\sigma\wedge N_i\sigma$，如果 σ 是一个 i－主观公式

A5n　$N_i\alpha\rightarrow\neg L_i\alpha$，如果 $\neg\alpha$ 是一个 K45n 一致的 i－客观基础公式

推演规则

MP_n　从 $\vdash\alpha$ 和 $\vdash\alpha\rightarrow\beta$ 可推出 $\vdash\beta$

Nec_n　从 $\vdash\alpha$ 推出 $\vdash L_i\alpha$ 和 $\vdash N_i\alpha$

定理 11　在 ONL_n 内，对所有的 α，如果 $\vdash\alpha$，那么 $\models^c\alpha$。

证　该证明过程可以通过普通的推演长度归纳来完成，在此，我们仅证明公理 A5n 的可靠性。假定 α 是基本的 i－客观的公式使得 $\neg\alpha$ 是 K45n 一致的。这样存在有包含 $\neg\alpha$ 的 i－集。根据定理 1.4，就可以得出对每一个世界 $w\in W^c$，都存在有一个世界 $w'\approx_i w$ 使得 $(M^c,w')\models\neg\alpha$。如果 $w'\in K_i^c(w)$，那么就可以得出 $(M^c,w)\models\neg L_i\alpha$。如果 $w'\notin K_i^c(w)$，那么 $(M,w)\models\neg N_i\alpha$。这样，$(M^c,w)\models\neg L_i\alpha\vee\neg N_i\alpha$；等价于 $(M^c,w)\models N_i\alpha\rightarrow\neg L_i\alpha$。于是就可以得出 $\models N_i\alpha\rightarrow\neg L_i\alpha$。

定义 9　组成 ONL_n^- 的所有的公式 α 都在 ONL_n 中，使得在 α 内，对于 $i\neq j$，没有 N_j 可以发生在 N_i 或 L_i 的辖域之内。

为了证明该公理系统对应于子语言 ONL_n^- 的完全性，我们需要一个预备引理，需要用它来刻画公式的一般形式。

引理 12　在 ONL_n 中的每一个公式 α 是可证的等价于它是由下面这种公式所组成的选言公式。

$\sigma\wedge L_1\varphi_{10}\wedge\neg L_1\varphi_{11}\wedge\cdots\wedge\neg L_1\varphi_{1m1}\wedge\cdots\wedge L_n\varphi_{n0}\wedge\neg L_n\varphi_{n1}\wedge\cdots\wedge\neg L_n\varphi_{nmn}\wedge\quad N_1\psi_{10}\wedge\neg N_1\psi_{11}\wedge\cdots\wedge\neg N_1\psi_{1k1}\wedge\cdots\wedge N_n\psi_{n0}\wedge\neg N_n\psi_{n1}\wedge\cdots\wedge\neg N_n\psi_{nkn}$，

其中 σ 是命题公式，φ_{ij} 和 ψ_{ij} 都是 i－客观基本公式。另外，如果 α 在 ONL_n^- 内，那么我们可以假定 φ_{ij} 和 ψ_{ij} 是 i－客观基本公式。

证　我们可以对 φ 的结构进行归纳，如果 φ 是形如 $L_i\varphi'$ 或 $N_i\varphi'$ 的公式，那么显然成立。原因是，如果 φ 是形如 $L_i\varphi'$ 的公式，那么因为 $\varphi\in ONL_n^-$，对于 $i\neq j$，N_j 不会出现在 φ' 内。我们现在运用归纳假设将 φ' 转换成在引理中描述的一般的形式。注意对于 $i\neq j$ 来说，N_j 不会出现在一般的形式中。我们现在使用等价关系来得到 $L_i\varphi'$ 并将其变成一般形式：

(1) $L_i(\psi\wedge\psi')\leftrightarrow(L_i\psi\wedge L_i\psi')$

(2) $L_i(\psi\vee\psi')\leftrightarrow(L_i\psi\vee L_i\psi')$

(3) $L_i(\psi\vee\neg L_i\psi')\leftrightarrow(L_i\psi\vee\neg L_i\psi)$

(4) $L_iL_i\psi\leftrightarrow L_i\psi$

(5) $(\neg L_i\perp\wedge L_i\neg L_i\psi)\leftrightarrow\neg L_i\psi$

(6) $L_iN_i\psi\leftrightarrow N_i\psi$

(7) $L_i\neg N_i\psi\leftrightarrow\neg N_i\psi$

引理 13　如果 S_j 是一个 j－集一致的集合，$j=1,\cdots,n$ 并且 σ 是一致的命题公式，那么就存在有 K45n 的情境 (M,w) 使得 $(M,w)\models\sigma$ 并且 $Obj_i(M,w)=S_j$。

引理 14　如果 φ 和 ψ 是 i－客观的基本公式使得 $L_i\varphi\wedge N_i\psi$ 是一致的，那么 $\varphi\vee\psi$ 是有效的。

引理 15　如果 w,w' 是典范模型中的世界使得 $w\approx_i w'$ 并且 $w'\notin K_i^c(w)$，那么存在有 i－客观基本公式 φ 使得 $L_i\varphi\in w$ 并且 $\varphi\notin w'$。

引理 16　对所有的 $\alpha\in ONL_n^-$，如果 $\models^c\alpha$，那么 $\vdash\alpha$。

证　如通常那样，只须证明如果 $\alpha\in ONL_n^-$ 是一致的，那么它相对于典范模型就是可满足的。不失一般性，我们可以假设 α 是引理 1.12 所刻画的一般的公式：

$\sigma\wedge L_1\varphi_{10}\wedge\neg L_1\varphi_{11}\wedge\cdots\wedge\neg L_1\varphi_{1m1}\wedge\cdots\wedge L_n\varphi_{n0}\wedge\neg L_n\varphi_{n1}\wedge\cdots\wedge\neg L_n\varphi_{nmn}\wedge N_1\psi_{10}\wedge\neg N_1\psi_{11}\wedge\cdots\wedge\neg N_1\psi_{1k1}\wedge\cdots\wedge N_n\psi_{n0}\wedge\neg N_n\psi_{n1}\wedge\cdots\wedge\neg N_n\psi_{nkn}$

此外，因为 $\alpha\in ONL_n^-$，可以假设 φ_{ij} 和 ψ_{ij} 是 i－客观的基本公式。令 A_i 由形如 $\varphi_{i0}\wedge\psi_{i0}\wedge\neg\varphi_{ij}$ 或者 $\varphi_{i0}\wedge\psi_{i0}\wedge\neg\varphi_{ij}$，$j\geqslant1$ 这样一致的公式组成。令 ξ_i 是独立于所有的在 A_i 中的公式。根据引理 1.7，这样的公式是存在的。令 S_i 是由所有的 i－集包含形如 $\varphi_{i0}\wedge(\neg\psi_{i0}\vee(\psi_{i0}\wedge\xi_i))$ 的公式组成的。根据引理 1.13，存在有 K45n 的模型 (M,w) 使得 $Obj_i(M,w)=S_i$，$i=1,..,n$，并且 $(M,w)\models\sigma$。这样在典范模型中就必须有一个世界 w^* 使得 $w^*=\{$基本的 $\varphi'|(M,w)\models\varphi'\}$。我们称 $(M^c,w^*)\models\alpha$。

为此，令 α' 是形如 $\sigma\wedge L_1\varphi_{10}\wedge\neg L_1\varphi_{11}\wedge\cdots\wedge\neg L_1\varphi_{1m1}\wedge\cdots\wedge L_n\varphi_{n0}\wedge\neg L_n\varphi_{n1}\wedge\cdots\wedge\neg L_n\varphi_{nmn}\wedge N_1\psi_{10}\wedge\neg N_1\psi_{11}\wedge\cdots\wedge\neg N_1\psi_{1k1}\wedge\cdots\wedge N_n\psi_{n0}\wedge\neg N_n\psi_{n1}\wedge\cdots\wedge\neg N_n\psi_{nkn}$ 的公式。我们首先证明 $(M,w)\models\alpha'$。根据构造，我们有 $(M,w)\models\sigma$。另外，根据定义，每一个世界 $w'\in K_i^M(w)$ 满足 φ_{i0}，所以有 $(M,w)\models L_i\varphi_{i0}$。因为 $L_i\varphi_{i0}\wedge\neg L_i\varphi_{ij}$，对每一个 $j\geqslant1$ 是一致的，使得 $\varphi_{i0}\wedge\neg\varphi_{ij}$ 是一致的。这样，$\varphi_{i0}\wedge\neg\psi_{i0}\wedge\neg\psi_{ij}$ 或者 $\varphi_{i0}\wedge$

$\psi_{i0} \wedge \neg \varphi_{ij}$中之一是一致的。如果后者是一致的，那么通过选择$\xi$，$\varphi_{i0} \wedge \psi_{i0} \wedge \xi_i \wedge \neg \varphi_{ij}$必然也是一致的。因为$S_i$是由所有包含$\varphi_{i0} \wedge (\neg \psi_{i0} \vee (\psi_{i0} \wedge \xi_i))$的i－集组成的。因此在$S_i$中必定存在i－集包含有$\neg \varphi_{ij}$。可推出$(M, w) \models \neg L_i \varphi_{ij}$，$j \geqslant 1$。因此，$(M, w) \models \alpha'$。因为$(M, w)$和$(M^c, w^*)$具有相同的基本公式集，随后可得到$(M^c, w^*) \models \alpha'$。

接下来，证明$(M^c, w^*) \models N_1 \psi_{10} \wedge \cdots \wedge N_n \psi_{n0}$。为此，假设$w' \approx_i w^*$并且$w' \notin K_i^c(w^*)$。根据引理1.15，必定存在有些i－客观的基本公式φ'使得$L_i \varphi' \in w^*$并且$\neg \varphi' \in w'$。因为$L_i \varphi' \in w^*$，随后可得出$(M, w) \models L_i \varphi'$，并且因此$\varphi'$是在$S_i$中的每一个i－集里。得到$obj_i(w') \notin S_i$。现在，下面四个公式必定有一个在$obj_i(w')$内：(1)$\varphi_{i0} \wedge \psi_{i0}$，(2)$\varphi_{i0} \wedge \neg \psi_{i0}$，(3)$\neg \varphi_{i0} \wedge \psi_{i0}$，(4)$\neg \varphi_{i0} \wedge \neg \psi_{i0}$。因为$L_i \varphi_{i0} \wedge N_i \psi_{i0}$是一致的，它不可能是(4)，根据引理1.14，它也不可能是(2)，因为如果是的话，将会使得w'在S_i内。这样，就必定是(1)或者(3)，所以$\psi_{i0} \in obj_i(w')$。因为对于所有的w'使得$w' \approx_i w^*$并且$w' \notin K_i^c(w^*)$是真的，可得出$(M^c, w^*) \models N_i \psi_{i0}$，$i = 1, \cdots, n$。

最后，我们必须证明$(M^*, w^*) \models \neg N_1 \psi_{ij}$，$i = 1, \cdots, n$并且$j = 1, \cdots, k$，显然$\psi_{i0} \wedge \neg \psi_{ij}$是一致的，否则的话$N_i \psi_{i0} \wedge \neg N_i \psi_{ij}$就是不一致的。这样至少下列之一(1)$\psi_{i0} \wedge \neg \psi_{ij} \wedge \neg \varphi_{i0}$或者(2)$\psi_{i0} \wedge \neg \psi_{ij} \wedge \varphi_{i0}$是一致的。在情况(2)，通过选择$\xi_i$，确定公式$\psi_{i0} \wedge \neg \psi_{ij} \wedge \varphi_{i0} \wedge \neg \xi_i$的一致性。如果$\psi_{i0} \wedge \neg \psi_{ij} \wedge \neg \varphi_{i0}$是一致的，令$\beta = \psi_{i0} \wedge \neg \psi_{ij} \wedge \neg \varphi_{i0}$，否则就令$\beta = \psi_{i0} \wedge \neg \psi_{ij} \wedge \varphi_{i0} \wedge \neg \xi_i$。根据构造，$\beta$是一致的。根据引理1.3，存在情境$(M', v)$使得$subj_i(M', v) = subj_i(M^*, w^*)$并且$(M', v) \models \beta$。在典范模型中存在有世界$w''$和情境$(M', v)$在基本公式上是相同的。根据构造，我们有$w'' \approx_i w^*$。另外，因为$(M^c, v) \models L_i(\varphi_{i0} \wedge (\neg \psi_{i0} \vee (\psi_{i0} \wedge \xi)))$，可得出$(M^c, w^*) \models L_i \neg \beta$。因为$(M^c, w') \models \beta$，我们于是可得$w' \notin K_i^c(w^*)$。另外，因为$(M^c, w') \models \neg \psi_{ij}$，可得出$(M^c, w^*) \models \neg N_i \psi_{ij}$。

以上就完成了对K45n系统的可靠性和完全性的证明。

自认知逻辑与非单调推理、缺省推理密切相关，而信念逻辑又与量化归纳推理有着一定的联系，因此认知逻辑对人工智能相关的各种推理技术的发展具有重要的推动作用。同时国内对多自体自认知逻辑的研究很少，认知逻辑向多主体和动态方向发展是当前认知逻辑发展的一种趋势。

参考文献：

[1] Kripke, S. A. Semantical Considerations on Modal Logic. Acta Philosophica Fennica 16, 1963: 83-94.

[2] Lakemeyer, G. All they know: A study in multi-agent autoepistemic reasoning[J]. In Proc. Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93), 1993: 376-381.

[3] Halpern, J. Y. and Lakemeyer, G. Multi-Agent Only Knowing[J]. In Y. Shoham, editor, Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge. Proc. Sixth Conference. Morgan Kaufmann, San Francisco, Calif, 1996.

[4] Halpern, J. Y. Reasoning about only knowing with many agents [J]. In proc. National Conference on Artificial Intelligence, 1993: 655-661.

[5] Halpern, J. Y. and Lakemeyer, G.. Levesque's axiomatization of only knowing is incomplete[J]. Artificial Intellignce74(2), 1995: 381-387.

[6] Levesque, H. J. All I know: a study in autoepistemic logic [J]. Artificial Intelligence 42(3), 1990: 263-309.

[7] Konolige, K. On the Relation between Default and Autoepistemic Logic [J]. Artificial Intelligence35, 1988: 343-382.

责任编辑　刘荣军

Multi-agent Autoepistemic Logic

DONG Ying-dong

(*Department of Philosophy*, *NanKai University*, *Tianjin* 300071, *China*)

Abstract: This paper tries to extend single agent autoepistemic logic system to multi-agent case. Meanwhile, we give some examples on the application of the system, including nonmonotonic reasoning and database systems. The paper also provides the soundness and completeness proof of multi-agent system by combining the newest academic achievement and applying approach of modal logic. It focuses on the extension of single agent only knowing logic system, given a transition from single agent system to multi-agent system by using K54n approach to describe the autoepistemic logic, followed by the introduction of its syntactic rules, the stability and stable sets, and a Canonical-model K45n model together with its semantics and proof theory. Satisfiability was brought to help characterizing multi-agent system. The proof of soundness and completeness was given in the end.

Key words: stable set; autoepistemic logic; nonmonotonic reasoning; i set