*

一个向上线序的命题时态逻辑 PTL

吕　进

(重庆大学 贸易与行政学院,重庆市 400030)

摘　要:命题时态逻辑 PTL 是一个可广泛应用于人工智能的逻辑,其特点是只有表达未来的时态算子。它刻画了人工智能研究中往往只需要描述未来状态,而不必关注过去的性质。PTL 给出了一个表达时间具有向上线性、传递性、持续性和离散性的公理化逻辑系统,并证明了其可靠性和完全性。

关键词:时态逻辑、向上线序、离散性、完全性

中图分类号:B815.5　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1673-9841(2010)02-0070-05

时态逻辑是哲学逻辑的主要研究领域之一,在语言逻辑和人工智能研究中有着广泛的应用前景。每一具体的时态逻辑表达了某一应用领域的特殊性质。PTL (propositional temporal logic)是一个用自然数表示时间序列的命题时态逻辑。

一、PTL 的直观背景

不同的哲学讨论以及在实际应用上的不同需要形成了不同的时态逻辑。有学者[1-2]详细讨论了在人工智能研究中的不同的时态逻辑,有学者[3-5]讨论了在哲学背景下的时态逻辑。对时间的分析在哲学上的主要争论是:时间是离散的还是稠密的,是线序的还是分枝的等等。在计算机和人工智能研究中,出于精确计算的需要,常常假定时间是离散的。PTL 假定了时间是离散的和向上线序的。

PTL 是以自然数来表示时间顺序,将命题的真值定义在时间点上的向上线序的命题时态逻辑。与通常的时态逻辑相比,它的一个特点是只有表示未来的算子,没有过去算子。这是由于过去算子在应用研究中并非是必要的。实际上,在人工智能研究中往往只需要描述未来状态,而不必关注过去。

一般地,用 t_0 或 0 来表示当前的时间点,而用 t_0,t_1,t_2,……或直接用 0,1,2,……表示一个时间进程。时间进程也称作时间路径。一个用自然数表示的时间路径表示一个可能世界,这与时间是均匀流逝的直观相吻合。未来是无穷的,因此时间路径也是无穷的,这要求每一时间点都要有下一时间点——分枝时态可以有多个不同的下一点,而线序时态要求有且只有一个下一点,用自然数来表达时间序列正好可以表达线序的这一要求。把当前点看作 0 点,不需要考虑对过去的表达,这样的时间序列是向上线序。同时这样的时间序列也表达了时间具有传递性、持续性和离散性的思想。

PTL 有两个主要的时态联结词:U(until)算子和 X (next time)算子。关于联结词 U,存在两种有着细微差别的理解。有学者[6]用公式 U(φ,ψ),其直观意思是,将来有 φ 为真,在此之前 ψ 一直为真;也有学者[7]用公式 $\varphi U \psi$,其直观意思是,或者 ψ 现在是真的,或者 ψ 在将来某个时间点为真,并且在此之前 φ 一直为真。两者不同的地方是后者包含了"现在"这一时间点,有学者[2]把这种直观意义下的 U 算子称作非严格限制的 U 算子。由于表示将来有时真的算子 F 和表示将来一直为真的算子 G 都可以由 U 算子来定义,相应地这两个算子也有着这两种不同的理解。当然,这些差别在句法上是可以相互翻译的。后一种理解要求模型具有自返性,而前一种理解没有这个要求。相应地,把前一种模型上的关系称为小于关系,后一种模型上的关系称为小于等于关系。

在关于时态逻辑的讨论中,对于公式有效性的定义有着两种不同的看法:定点法(anchored)和不定点法(floating)。定点法把有效公式定义为在所有可能世界的当前时间点上为真,而不定点法把有效公式定义为在所有可能世界的所有时间点上都为真。这两种定义有效性的方法也是可以相互翻译的。PTL 采用不定点的有效性定义。

二、PTL 的语言和语义

定义 1　给定一个原子命题变元集 P,时态逻辑 PTL 的语言有如下的递归定义:

* **收稿日期:**2009-11-25

作者简介:吕进(1971-),男,重庆市人,哲学博士,重庆大学贸易与行政学院,讲师,主要研究形式逻辑与逻辑哲学。

$\varphi :=p \mid \neg\varphi \mid \varphi\rightarrow\psi \mid X\varphi \mid \varphi U\psi$

其中，$X\varphi$ 表示在下一时间点上 φ 为真，$\varphi U\psi$ 表示在一个时间路径上 φ 一直为真直到 ψ 为真；命题算子 $\wedge$、$\vee$ 和 $\equiv$ 的定义与经典逻辑相同。定义 $F\varphi =_{df} trueU\varphi$，表示自当前时间点起可能有 φ 真，$F\varphi$ 在这里被当作公式 $\varphi U\psi$ 的一个特例；定义 $G\varphi =_{df} \neg F\neg\varphi$，表示在当前时间点起的所有时间点上 φ 都为真。

定义 2 一个线序时态逻辑 PTL 的模型是一个三元组 $M=\langle T,\leq,V\rangle$，其中，

(1)T 是一个非空的时间点集；

(2)$\leq$是定义在时间点集 T 上满足如下条件的二元关系：

(a)自返性：对于所有的 $t_i\in T$，都有 $t_i\leq t_i$；

(b)持续性和离散性：对于所有的 $t_i\in T$，都存在一个 $t_j\neq t_i$，使得 $t_i\leq t_j$，并且不存在 $t_k\in T$ 使得 $t_i\leq t_k$ 并且 $t_k\leq t_j$；

(c)传递性：对于所有的 $t_i,t_j,t_k\in T$，如果 $t_i\leq t_j$ 并且 $t_j\leq t_k$，那么 $t_i\leq t_k$；

(d)向上线性：对于所有的 $t_i,t_j,t_k\in T$，如果都有 $t_i\leq t_j$ 并且 $t_i\leq t_k$，那么或者 $t_j\leq t_k$，或者 $t_k\leq t_j$。

(3)V 是对每个命题变元在每个时间点 t_i 上的赋值函数。

每一个 T 也称作一个可能世界，每一可能世界 T 是一个时间结构。定义在时间点上的关系$\leq$满足自返性、持续性、离散性、传递性和向上线性，记一个满足持续性、离散性、传递性和向上线性但是不满足自返性的关系为$<$。

定义 3 给定一个模型 M 和一个时间点 $t_i\in T$，一个 PTL 中的公式 φ 在模型 M 上为真，当且仅当在可能世界 T 的一个时间点 t_i 上为 φ 真，记为$(M,t_i)\models_{PTL}\varphi$，简记为$(M,t_i)\models_{\varphi}$，有如下递归定义：

(1)$(M,t_i)\models p$，当且仅当 $t_i\in V(p)$；

(2)$(M,t_i)\models\neg\varphi$，当且仅当并非$(M,t_i)\models_{\varphi}$；

(3)$(M,t_i)\models\varphi\rightarrow\psi$，当且仅当或者并非$(M,t_i)\models_{\varphi}$，或者$(M,t_i)\models_{\psi}$；

(4)$(M,t_i)\models X\varphi$，当且仅当存在时间点 t_{i+1}，$(M,t_{i+1})\models\varphi$；

(5)$(M,t_i)\models\varphi U\psi$，当且仅当存在 t_k 使得 $t_i\leq t_k$，$(M,t_k)\models\psi$，并且对于所有的 $t_i\leq t_j$ 且 $t_j\leq t_k$ 都有$(M,t_j)\models\varphi$；

根据前面对 $G\varphi$ 和 $F\varphi$ 的定义，可以得出如下语义：

(6)$(M,t_i)\models G\varphi$，当且仅当对于所有 t_k 使得 $t_i\leq t_k$，都有$(M,t_k)\models\varphi$；

(7)$(M,t_i)\models F\varphi$，当且仅当存在 t_k 使得 $t_i\leq t_k$，使得$(M,t_k)\models\varphi$。

φ 在一个可能世界的某个时间点上为真也称 φ 在模型 M 上可满足，这时模型 M 也称是 φ 的模型。如果 φ 在模型 M 的每一可能世界 T 的每一时间点上都为真，则称 φ 相对于模型 M 有效，记为 $M\models_{PTL}\varphi$，在不引起歧义的情况下简记为$\models\varphi$。

命题 1 下列公式是相对于 PTL 的模型有效的：

(1)$(G\varphi\wedge G(\varphi\rightarrow\psi))\rightarrow G\psi$；

(2)$G\varphi\rightarrow\varphi\wedge XG\varphi$；

(3)$G(\varphi\rightarrow X\varphi)\rightarrow(\varphi\rightarrow G\varphi)$；

(4)$(X\varphi\wedge X(\varphi\rightarrow\psi))\rightarrow X\psi$；

(5)$X\neg\varphi\equiv\neg X\varphi$；

(6)$\varphi U\psi\equiv\psi\vee(\varphi\wedge X(\varphi U\psi))$。

(1)、(3)和(6)的证明略。

证明(2)：任给(M,t_i)，

$(M,t_i)\models G\varphi$，当且仅当对于所有的 t_k 使得 $t_i\leq t_k$，都有

$(M,t_k)\models\varphi$，则有

$(M,t_i)\models\varphi$，并且对于任意 t_j 使得 $t_{i+1}\leq t_j\leq t_k$，都有$(M,t_j)\models\varphi$；则有

$(M,t_i)\models\varphi$，并且$(M,t_{i+1})\models G\varphi$；则有

$(M,t_i)\models\varphi\wedge XG\varphi$。

证明(4)：任给(M,t_i)，

$(M,t_i)\models X\varphi\wedge X(\varphi\rightarrow\psi)$，当且仅当存在 t_{i+1}，使得

$(M,t_{i+1})\models\varphi\wedge(\varphi\rightarrow\psi)$，当且仅当

$(M,t_{i+1})\models\psi$，当且仅当

$(M,t_i)\models X\psi$。

证明(5)：任给(M,t_i)，

$(M,t_i)\models X\neg\varphi$，当且仅当存在 t_{i+1}，使得

$(M,t_{i+1})\models\neg\varphi$，当且仅当

没有$(M,t_{i+1})\models\varphi$，当且仅当

没有$(M,t_i)\models X\varphi$，当且仅当

$(M,t_i)\models\neg X\varphi$。

命题 1(2)表达了模型的自返性，1(4)表达了模型的向上线性。

命题 2 下列公式是相对于 PTL 的语义有效的：

(1)$G\varphi\rightarrow GG\varphi$；

(2)$X(\varphi\vee\neg\varphi)$。

证明(1)：任给(M,t_i)，

$(M,t_i)\models G\varphi$ 当且仅当对于所有的 t_j 使得 $t_i\leq t_j$，都有

$(M,t_j)\models\varphi$，并且对于所有的 k 使得 $t_i\leq t_j\leq t_k$，都有

$(M,t_k)\models\varphi$，则有对于所有的 t_j 使得 $t_i\leq t_j$，都有

$(M,t_j)\models G\varphi$，则有

$(M,t_i)\models GG\varphi$。

(2)的证明略。

命题 2(1)表达了模型的传递性。命题 2(2)表达了模型的持续性和离散性。

命题 3 如下命题相对于 PTL 的模型成立：

(1)如果$\models\varphi$并且$\models\varphi\rightarrow\psi$，那么$\models\psi$；

(2)如果$\models\varphi$，那么$\models G\varphi$。

证明：由定义 3(3)和(6)可证，略。

命题 3 是说分离规则和必然化规则能够保持 PTL 的有效性。

三、PTL 的公理系统

定义 4 PTL 的公理系统由以下公理和规则构成：

(1)所有命题逻辑的重言式；

(2)$(G\varphi\wedge G(\varphi\to\psi))\to G\psi$；

(3)$G\varphi\to\varphi\wedge XG\varphi$；

(4)$G(\varphi\to X\varphi)\to(\varphi\to G\varphi)$；

(5)$G\varphi\to GG\varphi$；

(6)$(X\varphi\wedge X(\varphi\to\psi))\to X\psi$；

(7)$X\neg\varphi\equiv\neg X\varphi$；

(8)$X(\varphi\vee\neg\varphi)$；

(9)$\varphi U\psi\equiv\psi\vee(\varphi\wedge X(\varphi U\psi))$；

MP 规则：从 φ 和$(\varphi\to\psi)$，可以得到 ψ；

N 规则：从 φ 可以得到 $G\varphi$。

如果一个公式 φ 在一个公理系统 R 中有一个证明，则称 φ 是该系统可证的，记为 $\vdash_R\varphi$，在不引起歧义的情况下也记为 $\vdash\varphi$。如果每一个可证的公式 φ 都是相对于该系统的语义有效的，则称该系统具有可靠性；如果每一个相对于其语义有效的公式 φ 都是该系统可证的，则称系统具有完全性。PTL 的公理系统是一个既有可靠性又有完全性的公理系统。

定理 1 PTL 相对于其语义是可靠的，即如果 $\vdash\varphi$，那么 $\models\varphi$。

证明：一个 PTL 的公式 φ 是可证的，则存在一个公式序列 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\varphi_n=\varphi$，使得对于每一个 φ_i，$i\in N$，满足如下条件之一：

(1)φ_i 是公理；

(2)φ_i 是由前面的公式运用推理规则得到的。

因此，要证明一个公式 φ 是有效的，只需要证明系统的每一个公理都相对于语义有的，并且推理规则是保持语义有效的。根据命题 1、命题 2 和命题 3 得证。

四、PTL 的完全性

对时态逻辑的完全性证明不同于一般的模态逻辑，因为时态逻辑的可能世界结构是一个有别于一般的可能世界模型的序结构。本文的完全性证明参考了一些学者[6,8,9]的证明并采用了一些研究者[2,3,5,10]的一些方法。

下面给出对 PTL 的完全性证明，首先给出证明所需的引理和定义。

定义 5 Γ 是一个公式集，如果对任意公式 φ，$\Gamma\vdash_R\varphi$ 和 $\Gamma\vdash_R\neg\varphi$ 不同时成立，则称 Γ 是 R-一致的。如果 Γ 是一致的，并且对于任意公式 φ，如果 $\varphi\notin\Gamma$ 则 $\Gamma\cup\{\varphi\}$不是一致的，则称 Γ 是 R-极大一致的。

Γ 是 R-一致的通常简称为 Γ 是一致的，Γ 是 R-极大一致的通常简称为 Γ 是极大一致的。

引理 2 (Lindenbaum 引理)任何一个一致集都可以扩张成一个极大一致集。

证明：略。

引理 3 Γ 是一个极大一致的公式集，任给公式 φ 和 ψ，都有：

(1)$\varphi\in\Gamma$ 当且仅当 $\neg\varphi\notin\Gamma$；

(2)$(\varphi\to\psi)\in\Gamma$，当且仅当或者 $\varphi\notin\Gamma$，或者 $\psi\in\Gamma$；

(3)$(\varphi\wedge\psi)\in\Gamma$ 当且仅当 $\varphi\in\Gamma\varphi$ 并且 $\psi\in\Gamma$；

(4)$(\varphi\vee\psi)\in\Gamma$ 当且仅当或者 $\varphi\in\Gamma$ 或者 $\psi\in\Gamma$；

(5)如果 $G\varphi\in\Gamma$，则有 $\varphi\in\Gamma$，$XG\varphi\in\Gamma$，并且 $GG\varphi\in\Gamma$；

(6)$\neg X\varphi\in\Gamma_i$ 当且仅当 $X\neg\varphi\in\Gamma_i$；

(7)如果 $X\varphi\in\Gamma$ 并且 $X(\varphi\to\psi)\in\Gamma$，那么 $X\psi\in\Gamma$；

(8)如果 $\varphi U\psi\in\Gamma$，则或者 $\psi\in\Gamma$，或者 $\varphi\in\Gamma$ 并且 $X(\varphi U\psi)\in\Gamma$。

证明：1－4 显然，略；(5)由公理(3)和公理(5)直接可得，(6)由公理(7)直接可得，(7)由公理(6)直接可得，(8)由公理(9)直接可得。

直观上说，一个极大一致集可以看作是对可能世界上的时间点(或者称为一个状态)的信息的完全描述。如果所有极大一致公式集的集合记为 S_{MCS}，那么一个可能世界 T 上的时间点 t_i 和 S_{MCS}的元素 Γ_i 可以一一对应。如果能够找到和可能世界 $T=t_0,t_1,t_2,\cdots$相对应的极大一致集序列 $\pi=\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots$，使得任给一个与系统一致的公式 φ，都有 $\varphi\in\Gamma_i$ 当且仅当$(M,t_i)\models\varphi$，那么就证明了系统完全性。对此需要建立如下的定义和引理。

定义 6 对于任意 $\Gamma_i,\Gamma_j\in S_{MCS}$，i 和 j 是自然数，定义关系 R_+ 和 $R_<$ 为：

(1)Γ_i,Γ_j 有 R_+ 关系，记为$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_+$，当且仅当$\{\varphi|X\varphi\in\Gamma_i\}\subseteq\Gamma_j$；

(2)Γ_i,Γ_j 有 $R_<$ 关系，记为$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$，当且仅当$\{\varphi|XG\varphi\in\Gamma_i\}\subseteq\Gamma_j$。

引理 4 对于任意 $\Gamma_i\in S_{MCS}$，满足$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_+$ 的 Γ_j 是唯一确定的。

证明：如果与 Γ_i 有 R_+ 关系的 Γ_j 不是唯一确定的，假设有 Γ_j 和 Γ'_j，则存在一个公式 φ，使得 $\varphi\in\Gamma_j$ 且 $\varphi\notin\Gamma'_j$，则有 $\neg\varphi\in\Gamma'_j$，则有 $X\varphi\in\Gamma_i$ 且 $X\neg\varphi\in\Gamma_i$，由引理 3(6)，有 $X\varphi\in\Gamma_i$ 且 $\neg X\varphi\in\Gamma_i$，这产生矛盾。

由于和 Γ_i 有 R_+关系的 Γ_j 是唯一确定的，直观上说，Γ_j 是排在 Γ_i 后面一位的极大一致集，故此时 $j=i+1$。

引理 5 对于任意 $\Gamma_i\in S_{MCS}$，$X\varphi\in\Gamma_i$，当且仅当存在 $\Gamma_j\in S_{MCS}$，使得$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_+$，$\varphi\in\Gamma_j$。

证明：先证从左边到右边。由引理 3(1)和 3(6)，如果 $X\varphi\in\Gamma_i$ 那么 $X\neg\varphi\notin\Gamma_i$，则$\{\varphi|X\varphi\in\Gamma_i\}$是一致的，由引理 2，$\{\varphi|X\varphi\in\Gamma_i\}$可扩张为一个极大一致集 Γ_j 且$\{\varphi|X\varphi\in\Gamma_i\}\subseteq\Gamma_j$，即存在 $\Gamma_j\in S_{MCS}$，使得$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_+$，$\varphi\in\Gamma_j$。

同理可证从右边到左边。证毕。

引理 4 和 5 证明了关系 R_+是满足持续性和离散性的。

引理 6 对于任意 $\Gamma_i\in S_{MCS}$，$XG\varphi\in\Gamma_i$ 当且仅当对于所有的 Γ_j 使得$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$，都有 $\varphi\in\Gamma_j$。

证明：由定义 6(2)直接可得。

此时 j 至少比 i 要大 1，因此有 $i<j$。

引理 7 对于任意 $\Gamma_i,\Gamma_j\in S_{MCS}$，如果$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_+$，那么$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$。

证明：如果$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_+$，则据定义6(1)，如果$XG\varphi\in\Gamma_i$则有$G\varphi\in\Gamma_j$，则由引理3(5)有$\varphi\in\Gamma_j$，则由定义6(2)得证。

引理8　$R_<$是基于R_+传递封闭的。即假设有一个极大一致集的序列记为$\pi=\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots$，其中$\Gamma_i\in\pi\subseteq S_{MCS}$，$i\geq 0$，如果对于任意$\Gamma_i\in\pi$，都有$(\Gamma_i,\Gamma_{i+1})\in R_+$，那么对于任意$\Gamma_i,\Gamma_j,\Gamma_k\in\pi$，如果有$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$且$(\Gamma_j,\Gamma_k)\in R_<$，那么$(\Gamma_i,\Gamma_k)\in R_<$。

证明：对于任意$\Gamma_i,\Gamma_j,\Gamma_k\in\pi$，如果有$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$且$(\Gamma_j,\Gamma_k)\in R_<$，那么存在序列$\Gamma_i,\Gamma_{i+1},\cdots,\Gamma_j,\Gamma_{j+1},\cdots,\Gamma_k$，使得相邻的两个极大一致集都有关系$R_+$。由引理3(5)，如果$G\varphi\in\Gamma_i$，那么有$XG\varphi\in\Gamma_i$，由定义6(1)，则有$G\varphi\in\Gamma_{i+1}$，如此先由引理3(5)再据定义6(1)，反复使用至$G\varphi\in\Gamma_k$，由定义6(2)可证$(\Gamma_i,\Gamma_k)\in R_<$。

引理8证明了基于R_+的$R_<$是满足传递性的。

定义7　一条路径是指满足如下条件的一个极大一致集的有序集，记为$\pi=\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots$，其中$\Gamma_i\in\pi$，$\pi\subseteq S_{MCS}$，$i\geq 0$，每一个$\Gamma_i$称为$\pi$上的点：

(1)任给$\Gamma_i\in\pi$，都有$\Gamma_{i+1}\in\pi$，使得$(\Gamma_i,\Gamma_{i+1})\in R_+$；；

(2)任给$\Gamma_i\in\pi$，如果$\Gamma_j\in\pi$，那么或者有$(\gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$，或者有$(\Gamma_j,\Gamma_i)\in R_<$。

定义7是说路径π上的点是由满足基于R_+的关系$R_<$的极大一致集构造起来的，条件(1)是说每一时间点都应该有下一个时间点，即是说未来是无穷的；条件(2)是说路径上任意两个时间点间都是有$R_<$关系的。如果能够证明所定义的路径是存在的，那么就可以将路径和可能世界对应起来。这需要证明如下引理：

引理9　满足定义7的路径$\pi=\Gamma_0,\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots$是存在的。

证明：首先证明条件(1)是能够满足的。

由引理3(1)，对于任意一个$\Gamma_i\in\pi$，则或者$\neg X\varphi\in\Gamma_i$或者$X\varphi\in\Gamma_i$；假设$X\varphi\in\Gamma_i$，则由引理5，$X\varphi\in\Gamma_i$当且仅当存在Γ_{i+1}，$\varphi\in\Gamma_{i+1}$，使得$(\Gamma_i,\Gamma_{i+1})\in R_+$；假设$\neg X\varphi\in\Gamma_i$，则由引理4，有$X\neg\varphi\in\Gamma_i$，则由引理5存在$\Gamma_{i+1}$，$\neg\varphi\in\Gamma_{i+1}$，使得$(\Gamma_i,\Gamma_{i+1})\in R_+$。则定义7(1)总是能满足的。

再证明条件(2)是能够满足的。

如果$\Gamma_j\in\pi$，由条件(1)，那么或者有$\Gamma_i,\Gamma_{i+1},\cdots,\Gamma_j$，或者有$\Gamma_j,\Gamma_{j+1},\cdots,\Gamma_i$，使得任意相邻两点间有$R_+$关系，那么由引理2.6、2.7和2.8，可得或者有$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$，或者有$(\Gamma_j,\Gamma_i)\in R_<$。

由引理9，以下两个推论是成立的。

推论10　(1)Γ_i是π上的点，总存在Γ_{i+1}，使得$(\Gamma_i,\Gamma_{i+1})\in R_+$；

(2)$\Gamma_i,\Gamma_k,\Gamma_j$是$\pi$上的点，如果$(\Gamma_i,\Gamma_k)\in R_<$并且$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$，$\Gamma_k\neq\Gamma_j$，那么或者$(\Gamma_k,\Gamma_j)\in R_<$，或者$(\Gamma_j,\Gamma_k)\in R_<$。

推论10(1)是说每一点都有下一个点，这实际上描述了未来的时间点是无穷的这一直观思想。推论10(2)是说路径上从当前点往后的点都是与当前点可比较的，即满足向上线性。

推论11　任给Γ_i是π上的点，都有

(1)$X(\varphi\vee\neg\varphi)\in\Gamma_i$；

(2)$G\varphi\rightarrow\varphi\in\Gamma_i$。

证明：(1)假设$X(\varphi\vee\neg\varphi)\notin\Gamma_i$，则有$\neg X(\varphi\vee\neg\varphi)\in\Gamma_i$，则有$X\neg(\varphi\vee\neg\varphi)\in\Gamma_i$，则有$X(\varphi\wedge\neg\varphi)\in\Gamma_i$，则有$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_+$，使得$(\varphi\wedge\neg\varphi)\in\Gamma_j$，矛盾。

(2)由引理3(5)可证。

推论11(1)证明了路径(满足持续性和离散性，(2)证明了有了路径(满足自返性。由引理9和推论10、11，得到如下引理是很自然的：

引理12　路径π上的点之间的关系就是定义2(2)的$\leq$关系。

证明：引理8证明了路径π满足传递性，推论10和11证明了路径(满足持续性、向上线性、离散性和自返性。

引理13　Γ_i是π上的点，公式$\varphi U\psi\in\Gamma_i$，当且仅当或者$\psi\in\Gamma_i$，或者存在Γ_j，$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$使得$\psi\in\Gamma_j$并且对于任意$\Gamma_k$，$(\Gamma_i,\Gamma_k)\in R_<$并且$(\Gamma_k,\Gamma_j)\in R_<$，都有$\varphi\in\Gamma_k$。

证明：如果公式$\varphi U\psi\in\Gamma_i$，由引理3(8)，或者有$\psi\in\Gamma_i$，或者有$\varphi\in\Gamma_i$并且$X(\varphi U\psi)\in\Gamma_i$。假设有$\varphi\in\Gamma_i$并且$X(\varphi U\psi)\in\Gamma_i$，由引理5、6和3(8)可得存在$\Gamma_{i+1}$，$(\Gamma_i,\Gamma_{i+1})\in R_+$使得或者$\psi\in\Gamma_{i+1}$，此时有$\Gamma_{i+1}=\Gamma_j$，使得$\psi\in\Gamma_j$并且对于任意$\Gamma_k$，$(\Gamma_i,\Gamma_k)\in R_<$并且$(\Gamma_k,\Gamma_j)\in R_<$，都有$\varphi\in\Gamma_k$；或者有$\varphi\in\Gamma_{i+1}$并且$X(\varphi U\psi)\in\Gamma_{i+1}$，此时由引理5、6和3(8)可得存在$\Gamma_{i+2}$，使得或者$\psi\in\Gamma_{i+2}$，此时有$\Gamma_{i+2}=\Gamma_j$，使得$\psi\in\Gamma_j$并且对于任意$\Gamma_k$，$(\Gamma_i,\Gamma_k)\in R_<$并且$(\Gamma_k,\Gamma_j)\in R_<$，都有$\varphi\in\Gamma_k$；或者有$\varphi\in\Gamma_{i+2}$并且$X(\varphi U\psi)\in\Gamma_{i2+1}$，……；依次类推，可得$\Gamma_i$是$\pi$上的点，公式$\varphi U\psi\in\Gamma_i$，当且仅当或者$\psi\in\Gamma_i$，或者存在$\Gamma_j$，$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$使得$\psi\in\Gamma_j$并且对于任意$\Gamma_k$，$(\Gamma_i,\Gamma_k)\in(R_<$并且$(\Gamma_k,\Gamma_j)\in R_<$，都有$\varphi\in\Gamma_k$。

引理9证明了满足二元小于关系的路径π是存在的，这使得如果将π和可能世界T一一对应，那么可能世界T也是存在的，因此使得如下定义的模型恰好就是PTL的模型。

定义8　一个模型是一个三元组$M=<T,\leq,V>$，使得：

(1)定义一个函数F，使得$F(\Gamma_i)=t_i$，其中$\Gamma_i\in\pi$，$\pi\subseteq S_{MCS}$，$t_i\in T$；

(2)如果$\Gamma_i,\Gamma_j\in\pi$，或者$\Gamma_i=\Gamma_j$，或者有$(\Gamma_i,\Gamma_j)\in R_<$，则有$t_i\leq t_j$；

(3)对每一原子命题$p\in P$的真值有如下定义：$p\in\Gamma_i$，$\Gamma_i\in\pi$，$\in\subseteq S_{MCS}$，当且仅当$t_i\in V(p)$，$t_i\in T$。

直观地说，每一路径π上的点Γ_i对应一个可能世界T上的时间点t_i，极大一致公式集Γ_i是对可能世界T上的时间点t_i的信息的完全描述，路径π上的极大一致集间的关系与时间点t_i上的关系是相同的，都满足二元$\leq$关系。可以看到定义8所定义的模型恰好就是PTL的模型，即有：

引理 14　模型 $M=<T,\leq,V>$ 就是 PTL 的模型。

证明：模型 $M=<T,\leq,V>$ 的各项定义符合 PTL 模型的各项定义。引理 9 证明了可能世界集 T 是非空的，引理 12 证明了 π 上的关系是 PTL 模型上的关系 $\leq$。

由以上的定义和引理，可以证明如下引理成立：

引理 15　如果 $\varphi\in\Gamma_i$，那么 $(M,t_i)\models\varphi$。

证明：施归纳于公式 φ 的结构：

情况 1：φ 是一个原子命题，此时有定义 $p\in\Gamma_i$ 当且仅当 $t_i\in V(p)$，当且仅当 $(M,t_i)\models p$；

情况 2：φ 是 $\neg\psi$，此时 $\neg\psi\in\Gamma_i$ 当且仅当 $\psi\notin\Gamma_i$，由归纳假设，此时没有 $(M,t_i)\models\psi$，则 $(M,t_i)\models\neg\psi$；

情况 3：φ 是 $\psi\rightarrow\chi$，此时 $\psi\rightarrow\chi\in\Gamma_i$ 当且仅当或者 $\chi\in\Gamma_i$ 或者 $\psi\notin\Gamma_i$，由归纳假设，此时或者 $(M,t_i)\models\chi$，或者没有 $(M,t_i)\models\psi$，即有 $(M,t_i)\models\psi\rightarrow\chi$；

情况 4：φ 是 $X\psi$，则 $X\psi\in\Gamma_i$ 当且仅当 $\psi\in\Gamma_{i+1}$，由归纳假设 $(M,t_{i+1})\models\psi$，则有 $(M,t_i)\models X\psi$；

情况 5：φ 是 $G\psi$，则由引理 3(5) 和引理 6，$G\psi\in\Gamma_i$ 当且仅当对于所有 $j\geq i$，都有 $\psi\in\Gamma_j$，由归纳假设，则有对于所有 $j\geq i$，都有 $(M,t_j)\models\psi$，则有 $(M,t_i)\models G\psi$；

情况 6：φ 是 $\psi U\chi$，$\pi=\Gamma_0,\Gamma_1,\cdots$ 是一个路径，由引理 13 和归纳假设，或者 $(M,t_i)\models\chi$，或者存在 j，k 有 $j>k\geq i$，使得 $(M,t_j)\models\chi$ 并且 $(M,t_k)\models\psi$，那么由定义 3(5)，$(M,t_i)\models\psi U\chi$。

定理 16　所有相对于 PTL 语义有效的公式都是 PTL 的定理，即如果 $\models\varphi$，则 $\vdash\varphi$。

证明：假设 $\vdash\varphi$ 不成立，则 $\{\neg\varphi\}$ 是一致的。因此，存在一个极大一致集 Γ_i，使得 $\neg\varphi\in\Gamma_i$。那么由引理 15，有 $(M,t_i)\models\neg\varphi$，则 $\models\varphi$ 不成立。

对 PTL 公理系统的完全性证明也可以用其他的方法[1,3,6]。

PTL 是向上线序的，表达了未来无限这一直观思想。但是根据时间点序列的构造，完全可以表达过去无限这一思想。当然这需要增加表示过去的算子，Stirling 就提供了一个很好的例子[1]。这样构成的逻辑就是一个线序时态逻辑，可以对诸如回忆、追述等等性质进行逻辑刻画。

有学者[11]认为，用分枝时态逻辑 CTL 作为时间背景可以强调主体的行动有选择性。我认为，不同的时态分枝完全可以用不同的线序时间序列来表达，其结果是相同的。较之 CTL，PTL 还具有逻辑上简洁的优势。

参考文献：

[1]　C. Stirling, Modal and Temporal Logics[A]. Handbook of Logic in Computer Science, volume 2, Clarendon Press, Oxford, 1992: 477-563.

[2]　E. A. Emerson, Temporal and Modal logic[G]//Handbook of Theoretical Computer Science, Vol. B, J. van Leeuwen (ed.), Elsevier Science Publishers and MIT Press, 1990: 995-1072.

[3]　M. Finger, D. M. Gabbay, and M. Reynolds, Advanced Tense Logic[G]//Handbook of Philosophical Logic. Dov M. Gabby and F. Guenthner(ed.), Klumwer Academic Publishers, Volume 7, 2002: 43-204.

[4]　J. P. Burgess, Basic Tense logic[G]//Handbook of Philosophical Logic. Dov M. Gabby and F. Guenthner(ed.), Klumwer Academic Publishers, Volume 7, 2002: 1-42.

[5]　Yde Venema, Temporal Logic[G]//Philosophical Logic. Lou Goble(ed.), Blackwell Publisher, 2001: 203-223.

[6]　D. Gabby, A. Pnueli, S. Shelah, and J. Stavi, On the Temporal Analysis of Fairness[G]//In Proc. 7th ACM Symp. Princ. of Prog. Lang., 1980: 163-173.

[7]　O. Lichtenstein, A. Pnueli, [2000] Propositional Temporal Logics: Decidability and Completeness[J], L. J. of the IGPL, 2000,8(1):55-85.

[8]　P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, Modal Logic[M]. Cambridge University Press, 2001.

[9]　W. van der Hoek, M. Wooldridge, Cooperation, Knowledge, and Time: Alternating-time Temporal Epistemic Logic and its Applications[J]. Studia Logica. 2003,75:125-157.

[10]　L. Giofdano, A. Martelli, and C. Schwind, Reasoning about Actions in Dynamic Linear Time Temporal Logic[J]. L. J. of the IGPL. Oxford University press, 2001,9(2): 273-287.

[11]　C. M. Jonker, J. Treur, and W. de Vries, Temporal Analysis of the Dynamics of Beliefs, Desires, and intentions [J]. Cognitive Science Quarterly (Special Issue on Desires, Goals, Intentions, and Values: Computational Architectures), 2002,2:471-494.

责任编辑　刘荣军

A Propositional Temporal Logic With Up-Linear

LÜ Jin

(*College of Trade and Public Administration*, *Chongqing University*, *Chongqing* 400032, *China*)

Abstract: The propositional temporal logic (PTL) with up-linear can be used to artificial intelligent study. PTL was characterized by the temporal operator for the expression of future time in artificial intelligent study. PTL established an axiom system that it characterized the properties of time as up-linear, discreteness, seriality, transitivity, and so on. PTL was proved to be sound and complete.

Key words: temporal logic; up linear; discreteness; completeness