*

论模态逻辑中的嵌入问题

张 晓 君

(中国社会科学院 哲学研究所,北京市 100732)

摘　要: 目前在模态逻辑中,主要存在两种嵌入方法:一种是“坍塌嵌入”,一种是“翻译嵌入”;用周北海和 A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev 对这两种嵌入方法进行有针对性的论述,可以发现:虽然正规模态逻辑系统 S5 不可坍塌嵌入经典命题逻辑 P,但是“S5 可以翻译嵌入 P 中”,因此,通过定义翻译嵌入映射 Tr_4,从而证明了 S5 可翻译嵌入 P;最终我们提出并证明了这样的定理:“翻译嵌入映射 Tr_4 可以使得 S5 的所有子系统 K、D、T、S4 和 B,以及系统 KDc 与 KTc 都能够翻译嵌入系统 P 中。”

关键词: 模态逻辑;能行的翻译函数;坍塌嵌入;翻译嵌入;翻译嵌入映射

中图分类号: B815.1　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1673-9841(2011)01-0061-06

在逻辑中,我们经常通过对一个系统添加特征公理来得到其扩张系统,那么,我们能否用一个系统所对应的逻辑语言中的联结词,来解释其扩张系统所对应的逻辑语言中的联结词呢?在一个系统的扩张的过程中,是否存在真扩张系统保持原被扩张系统的各种逻辑性质的方法呢?为此,在逻辑中引入了嵌入(embedding)的方法,从而使得这两个问题都有了肯定的答案。

通过查阅相关资料,笔者发现,目前在模态逻辑中,主要存在两种嵌入:一种是“坍塌嵌入”,一种是“翻译嵌入”。前者就是周北海先生所定义的“如果 S 是 P 的真扩张,且 S 可嵌入 P,则称 S 坍塌为 P,或 S 垮为 P”[1]73-76,笔者姑且把这种嵌入叫做“坍塌嵌入”,因为从周先生的所给出定义来看,如果我们能够把一个系统的真扩张嵌入到原来被扩张的系统中,就必然会引起系统的坍塌,而且这种嵌入是单向的,即,只可以把真扩张后得到的系统嵌入到原被扩张的系统中,不可以把原被扩张的系统嵌入到对其进行真扩张后得到的系统中。后者就是 A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev 所定义的嵌入,该嵌入是用一个能行的翻译函数,把一个真扩张系统嵌入到原被扩张系统(如把经典命题逻辑嵌入到直觉主义命题逻辑[2]46-47 中或把原被扩张系统嵌入到其真扩张系统(如把直觉主义命题逻辑嵌入到 S4、Grz、GL 系统[2]96-99 中,笔者姑且把这种嵌入叫做“翻译嵌入”,因为笔者认为,一般情况下,这种嵌入不会引起系统的坍塌,只要我们找到从一个系统到另一个系统之间的翻译映射,就可以把一个系统嵌入到另一个系统中,而且这种嵌入是双向的,即,我们既可以把真扩张后得到的系统嵌入到原被扩张的系统中,也可以把原被扩张的系统嵌入到对其进行真扩张后得到的系统中。我们千万不可把这两种嵌入混为一谈。在下文中,笔者将分别对这两种嵌入进行较为详细的论述和拓展。

一、坍塌嵌入

经典命题逻辑,简称为 CI,但为了行文的简洁和流畅,在本文中都将用 P 来表示经典命题逻辑。周北海先生所定义的从一个模态系统 S 到经典命题逻辑系统 P 的嵌入映射 f 如下:

定义 1　嵌入映射

令 S 是任意以 $\neg$、$\rightarrow$ 和 $\Box$ 为初始联结词或算子的模态系统,P 是经典命题逻辑系统,t 是空符号串,

---

*　**收稿日期:** 2009-09-06

作者简介: 张晓君(1970-),女,四川南部人,中国社会科学院哲学研究所,博士研究生,主要研究现代逻辑。

或 ¬，或某一个可由 ¬ 和 → 来加以定义的符号串，对于任意命题变元 p，任意 $\alpha\in S$、$\beta\in S$ 的公式 α、β 而言，若 f 是满足以下条件的映射：(1)$f(p)=p$；(2)$f(\neg\alpha)=\neg f(\alpha)$；(3)$f(\alpha\to\beta)=f(\alpha)\to f(\beta)$；(4)$f(\Box\alpha)=tf(\alpha)$，则称 f 是 S 到 P 的嵌入映射。

定义 2　任一个 $\alpha\in S$ 的公式 α，若存在从模态系统 S 到经典命题逻辑系统 P 的一个嵌入映射 f，使得 $\vdash_s\alpha\Leftrightarrow\vdash_p f(\alpha)$，则称 S 可嵌入 P。

继而，周先生给出了这样的定义："如果 S 是 P 的真扩张，且 S 可嵌入 P，则称 S 坍塌为 P，或 S 垮为 P"，接着他用 P-变形来证明了：(1)用 $p\leftrightarrow\Box p$ 这一特征公理对经典命题逻辑系统 P 进行扩张后所得到的 PTr 系统是一个能够垮为 P 的坍塌系统；(2)正规模态逻辑系统 S5 不可嵌入 P，因而 S5 不是坍塌的系统；(3)S5 的其他子系统均不是坍塌的系统。

根据周先生的定义和证明可知，如果我们能够把一个系统的真扩张嵌入到原来被扩张的系统中，就必然会引起坍塌现象。依笔者看，只有在坍塌嵌入中，能行的坍塌嵌入函数才会变成一个恒等函数，从而导致出现了所谓的从一个系统的真扩张到原被扩张系统的"copy"映射现象，即出现了所谓的"矛盾"。PTr 系统坍塌为系统 P 的嵌入映射就是一个"copy"映射，正是这种"copy"映射导致了系统坍塌。这种坍塌嵌入映射把模态词映射成真值联结词，把模态算子映射成真值算子，把模态函项映射成真值函项，从而把模态系统映射成真值系统。PTr 系统的特征公理 $p\leftrightarrow\Box p$ 使得其模态函项强大到足以退化成真值函项，从而引起 PTr 系统坍塌为 P 系统。

在笔者看来，PTr 系统坍塌为经典命题逻辑系统 P 的意思是，PTr 系统与系统 P 变成了一模一样的等价系统，这说明：一个系统不能够进行无限制的扩张，当扩张到达一定的极限时就会引起系统的坍塌。通过对系统 P 的下列正规扩张的轨迹进行盘点，我们就可以更清晰地认识这一点。在经典命题逻辑系统 P 的基础上，我们通过添加特征公理 $K(\Box(p\to q)\to(\Box p\to\Box q))$ 和必然化规则 $RN(\vdash\alpha\Rightarrow\vdash\Box\alpha)$ 就可以得到最小的正规系统 K；在系统 K 的基础上，添加特征公理 $D(\Box p\to\Diamond p)$，就得到了系统 $D=KD$；在系统 K 的基础上，添加特征公理 $T(\Box p\to p)$，得到系统 $T=KT$；在系统 T 的基础上，分别添加特征公理 $4(\Box p\to\Box\Box p)$、$E(\Diamond p\to\Box\Diamond p)$，就得到系统 $S4=KT4$ 与 $S5=KTE$；在系统 T 的基础上，添加特征公理 $B(p\to\Box\Diamond p)$，得到系统 $B=KTB$；在系统 K 的基础上，分别添加特征公理 $Dc(\Diamond p\to\Box p)$、$Tc(p\to\Box p)$，得到系统 KDc 与 KTc；但是，当我们向经典命题逻辑系统 P 中添加一个非常强势的公理 $Tr(p\leftrightarrow\Box p)$ 时，就会得到可以坍塌为系统 P 的 PTr 系统。事实上，从公理 $Tr(p\leftrightarrow\Box p)$ 可以推出这里所罗列的所有特征公理，就足以说明公理 Tr 是多么地强势。可以证明，除了系统 PTr 外，这里的所有其他系统，比如 S5、S5 的所有子系统 K、D、T、S4 和 B，以及 KDc 与 KTc 系统都不可坍塌嵌入系统 P 中。

二、翻译嵌入

经典命题逻辑 P 是在直觉主义命题逻辑(简称为 Int)的基础上，加入排中律扩张而成，即 $P=Int+p\vee\neg p$，故，经典命题逻辑是在直觉主义命题逻辑的真扩张，即 $Int\subset P$。A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev[1997]认为，可以在下面的嵌入意义上把 P 嵌入到 Int 中：

定义 3　翻译嵌入

令 S_1、S_2 分别是某个逻辑，当然 S_1、S_2 可能分别是不同语言 L_1、L_2 上的逻辑，全体-L_1 公式、L_2-公式的集合分别记为 $ForL_1$、$ForL_2$。对于所有的 $\alpha\in ForL_1$ 而言，如果存在一个从 $ForL_1$ 到 $ForL_2$ 的能行函数 Tr，使得 $\alpha\in S_1$ 当且仅当 $Tr(\alpha)\in S_2$，那么我们就说，存在从 S_1 到 S_2 的一个嵌入(或一个翻译[2]46-47，即 S_1 可以嵌入到 S_2 中。

这种翻译嵌入使得公式的结构得以保持。笔者对此的理解是，寻找从 S_1 到 S_2 的一个翻译嵌入的关键是，找到一个从 $ForL_1$ 到 $ForL_2$ 的能行翻译函数 Tr，使得 $\alpha\in S_1$ 当且仅当 $Tr(\alpha)\in S_2$，而且该翻译函数所对应的嵌入映射把命题变元、否定式、合取式、蕴涵式、等值式还是分别映射成命题变元、否定式、合取式、蕴涵式、等值式，从而使得翻译后得到的公式结构与翻译前的公式结构一样，即使得被翻译的公式的结构得以保持，这样做的目的是可以使得各种逻辑性质得以保持。例如，如果 S_1 可以嵌入到 S_2

中，且 S_2 是一致的或是可判定的，则 S_1 也是一致的或也是可判定的。

A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev 证明了 Glivenko 定理：对于每个公式 α，$\alpha \in P$，当且仅当，$\neg\neg\alpha \in Int$。并由该定理得到下面 4 个推论：(1)对于每一个公式 α，通过 $Tr_1(\alpha) = \neg\neg\alpha$ 来定义的翻译嵌入映射 Tr_1 就是 P 到 Int 的一个嵌入；(2)对于每个公式 α，$\neg\alpha \in P$，当且仅当，$\neg\alpha \in Int$；(3)对于每个公式 $\alpha = \beta \to \neg\gamma$，$\alpha \in P$，当且仅当，$\alpha \in Int$；(4)对于每个没有包含 $\wedge$ 和 $\neg$ 之外的联结词的公式 α，$\alpha \in P$，当且仅当，$\alpha \in Int$。

根据这里的推论(4)，可以定义另一个翻译嵌入映射 Tr_2：①$Tr_2(\alpha) = \alpha$，对所有的原子公式 α；②$Tr_2(\alpha \wedge \beta) = Tr_2(\alpha) \wedge Tr_2(\beta)$；③$Tr_2(\alpha \vee \beta) = \neg(\neg Tr_2(\alpha) \wedge \neg Tr_2(\beta))$；④$Tr_2(\alpha \to \beta) = \neg(Tr_2(\alpha) \wedge \neg Tr_2(\beta))$。由此可得到推论(5)：$Tr_2$ 也是 P 到 Int 的一个嵌入。

A. Chagrov 他们还证明了下面的定理 2：如果一个公式 α 没有包含 $\vee$，并且 α 的变元的每个出现都是在某个 $\neg$ 的辖域中，那么，$\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha \in Int$。根据该定理，可以构造 P 到 Int 的另一个翻译嵌入映射 Tr_3：①$Tr_3(\bot) = \bot$；②$Tr_3(p) = \neg\neg p$，对于所有的变元 p；③$Tr_3\alpha \wedge \beta) = Tr_3(\alpha) \wedge Tr_3(\beta)$；④$Tr_3(\alpha \vee \beta) = \neg(\neg Tr_3(\alpha) \wedge \neg Tr_3(\beta))$；⑤$Tr_3(\alpha \to \beta) = Tr_3(\alpha) \to Tr_3(\beta)$。

从以上分析笔者意识到，从一个系统到另一个系统的翻译嵌入，可以存在不同的翻译嵌入映射来实现其嵌入目的，而且这些不同的翻译嵌入映射与系统的初始联结词的选择有关。这些映射的构造应该遵循“被翻译的公式的结构应该得以保持”的原则，并满足所涉及的两个系统之间的相关定理和推论。

A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev 还证明了下面的定理 3：Gödel 翻译 T 是从 Int 到 S4 和 Grz 的一个嵌入。这里的 Gödel 翻译 T 就是从所有的直觉主义命题逻辑公式 ForL 到所有的模态逻辑公式 ForML 的翻译嵌入映射 T：①$T(p) = \Box p$；②$T(\bot) = \Box\bot$；③$T(\alpha \wedge \beta) = T(\alpha) \wedge T(\beta)$；④$T(\alpha \vee \beta) = T(\alpha) \wedge T(\beta)$；⑤$T(\alpha \to \beta) = T(\alpha) \to T(\beta)$。通过该翻译嵌入映射 T，应该在“可证”语境下理解的直觉主义联结词就被转化为经典联结词。

为了向读者清晰地描绘出，如何证明通过一个翻译映射把一个逻辑翻译嵌入另一个逻辑的思路历程，在此，笔者有必要详细介绍：A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev 是如何证明这里的映射 T：ForL→ForML，即著名的 Gödel 翻译，是从 Int 到 S4 和 Grz 的一个嵌入的。

首先，令 $M = \langle F, V \rangle$ 是一个自返且传递的拟序框架 F 上的一个模态模型，在(偏序)框架 F 的骨架 ρF 中定义一个直觉主义的赋值 ρV：对于每一个 $p \in VarL$ 的变元，$\rho V(p) = \{C(x):(M, x) \models \Box p\}$。由传递框架的性质([2]，p. 67)知，该定义不依赖于 x 的选择，而且集合 $\rho V(p)$ 在 ρF 中是向上封闭的。我们把 $\rho M = \langle \rho F, \rho V \rangle$ 叫做模型 M 的骨架。

相反，如果 $N = \langle \rho F, U \rangle$ 是基于拟序框架 $F = \langle W, R \rangle$ 的骨架上的一个直觉主义模型，那么对于每一个 $p \in VarML$ 的变元，$V(p) = \{x \in W:(N, C(x)) \models p\}$。这样我们得到的模态模型 $M = \langle F, V \rangle$ 的骨架就是(同构于)N。特别地，如果 F 中所有的聚类都是由单个自返点组成，那么 F 就与 ρF 同构，模型 M 也与它的骨架 N 同构。至此，需要证明下面的引理：

引理：(骨架)

对于基于拟序框架上的命题模态语言的每一个模型 M 而言，对 M 中的每一个点 x 和每一个 ForL 公式 α，$(\rho M, C(x))) \models \alpha$ 当且仅当 $(M, x) \models T(\alpha)$。

证明：对 α 的结构进行归纳。其归纳基础是来自 ρM 和 $T(\alpha)$ 的定义。假设 $\alpha = \beta \to \gamma$，则：

$(\rho M, C(x)) \not\models \alpha$ 当且仅当 $\exists y \in x\uparrow((\rho M, C(y)) \models \beta$ 且 $(\rho M, C(y)) \not\models \gamma)$

当且仅当 $\exists y \in x\uparrow((M, y) \models T(\beta)$ 且 $(M, y) \not\models T(\gamma))$

当且仅当 $(M, x) \not\models \Box(T(\beta) \to T(\gamma))$，即 $(M, x) \not\models T(\alpha)$。

对于 $\alpha = \beta \vee \gamma$，我们有：$(\rho M, C(x)) \models \alpha$ 当且仅当 $(\rho M, C(x)) \models \beta$ 或 $(\rho M, C(x)) \models \gamma$，当且仅当 $(M, x) \models T(\beta)$ 或 $(M, x) \models T(\gamma)$，当且仅当 $(M, x) \models T(\alpha)$。对于 $\alpha = \beta \wedge \gamma$ 的情况的证明与此类似。□

由这个引理可以得到下面的推论：

推论：对于每个拟序框架 F 和每个 ForL 公式 α，$\rho F \models \alpha$ 当且仅当 $F \models T(\alpha)$。

至此，A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev 已经做好了证明定理 3 的准备工作。

定理 3　Gödel 翻译 T 是从 Int 到 S4 和 Grz 的一个嵌入。

证明：我们必须分别说明对于每一个 ForL 公式 α，$\alpha \in \mathrm{Int}$ 当且仅当 $T(\alpha) \in \mathrm{S4}$ 和 $\alpha \in \mathrm{Int}$ 当且仅当 $T(\alpha) \in \mathrm{Grz}$。假设 $T(\alpha) \notin \mathrm{S4}$（或 $T(\alpha) \notin \mathrm{Grz}$），那么存在一个拟序框架 F 使得 $F \not\models T(\alpha)$，根据刚才的推论，$\rho F \not\models \alpha$，因此 $\alpha \notin \mathrm{Int}$。

相反，假设 $\alpha \notin \mathrm{Int}$，那么根据 Int 具有有穷可逼近的性质（[2]，p. 47）知，存在一个有穷的直觉主义框架 F 反驳 α，正如前面所说明的那样，该框架可以看作是与它的骨架同构的一个模态框架。因此，根据刚才的推论，由 $T(\alpha) \notin \mathrm{S4}$ 和 $T(\alpha) \notin \mathrm{Grz}$ 可知，$F \not\models T(\alpha)$（因为 F 既不包含真聚类，也不包含无穷升链）。证毕。

笔者认为，从 A. Chagrov 和 M. Zakharyaschev 对这个翻译嵌入的证明全过程可看出，他们充分利用点的聚类和框架的骨架来使本来很复杂的证明得到了大大简化。因为根据聚类的定义可知，处理一个包含点 x 的聚类 C(x)就等于处理了与 x 等值和从 x 可及的所有的点与可及 x 的所有的点，也就是说聚类 C(x)是与 x 具有可及关系的点的“代表”。同样，根据框架的骨架的定义，骨架就是相对于等价关系的传递框架 F 的“代表”，处理一个骨架也就处理了与之具有等价关系的所有传递框架。在逻辑研究的过程中，把无穷的问题化为有穷的问题，对复杂的问题进行简化，是我们研究逻辑的一个基本思路，也是一个值得我们深思的问题。比如，我们在证明模态逻辑的完全性时，除了常用的典范模型的方法外，一个具有更大普适性的方法就是使用过滤的方法，而过滤就是通过把模型中的世界集划分成相互排斥的、非空的等价类，我们只研究每个等价类中的一个“代表”即可。一个语句数目为 n 的一个语句集的一个过滤就是一个具有 2^n 个世界（原先模型中的世界的等价类）的模型。当一个滤子是无穷的时候，我们甚至可以得到一个有穷的过滤[2]142。这样，通过过滤就使得需要我们研究的世界的数目大大减少，从而使问题得到极大的简化。这些简化方法在逻辑研究中都是值得我们借鉴的。

此外，A. Chagrov 他们还证明了下面的定理 4：对于每个公式 α，通过 $T^+(\alpha) = (T(\alpha))^+$ 定义的翻译 T^+ 是从 Int 到 GL 的一个嵌入。

笔者认为，一方面，由前面的推论(1)、推论(5)和定理 2 可知，一个真扩张系统（如 P）可以翻译嵌入到原被扩张的系统（如 Int）中。另一方面，因 $\mathrm{S4} = \mathrm{KT4} = P \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \oplus \Box p \to p \oplus \Box p \to \Box\Box p$，又因为 $\mathrm{Int} \subset P$，所以 S4 也是 Int 的真扩张，即 $\mathrm{Int} \subset \mathrm{S4}$；同样，因为 $\mathrm{Grz} = P \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \oplus \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$，$\mathrm{GL} = P \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \oplus \Box p \to \Box\Box p \oplus \Box(\Box(p \to p) \to \Box p$（本文中的 $\oplus$ 表示的是正规扩张），所以 Grz 和 GL 都是 Int 的真扩张。由这里的定理 3 和定理 4 可知，一个原被扩张系统（如 Int）也可以翻译嵌入到其真扩张后得到的系统（如 S4、Grz 和 GL）中。故，从这两方面的意义上讲，翻译嵌入是双向的。而坍塌嵌入则只能把一个真扩张系统（如 PTr）坍塌嵌入到原被扩张的系统（如 P）中，从这种意义上讲，坍塌嵌入是单向的。

三、拓展研究

笔者认为，虽然正规模态逻辑系统 S5 不可坍塌嵌入经典命题逻辑 P 中[1]74-76，但是 S5 却可以翻译嵌入 P 中。

分析：把 S5 翻译嵌入 P 的突破口是找到从 S5 到 P 的翻译嵌入映射，我们要找的映射应该把所有的 ForS5 的公式都映射成 ForP 的公式。令 $\neg$，$\to$ 是 S5 的初始联结词，$\Box$ 是 S5 的初始算子，$\{\neg, \to\}$ 是 P 的初始完备集，而 $\mathrm{S5} = \mathrm{KTE} = P \oplus \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \oplus \Box p \to p \oplus \Diamond p \to \Box\Diamond p$。所以，笔者把从 S5 到 P 的翻译嵌入映射定义如下：

定义 4　翻译嵌入映射 Tr_4

令 α、β 是任意公式，(1) $Tr_4(p) = p$；(2) $Tr_4(\neg\alpha) = \neg Tr_4(\alpha)$；(3) $Tr_4(\alpha \to \beta) = Tr_4(\alpha) \to Tr_4(\beta)$；(4) $Tr_4(\Box\alpha) = Tr_4(\alpha)$。

该映射具有这样的性质：(1) Tr_4 把任意的 ForP 公式都映射成其自身；(2) Tr_4 删去 ForS5 公式中

的所有模态算子，从而把所有的 ForS5 公式映射成 ForP 公式。

至此，笔者提出并证明下面的定理 5：

定理 5　定义 4 的翻译映射 Tr_4 就是 S5 到 P 的一个翻译嵌入。

分析：根据翻译嵌入的定义，对于所有的 $\alpha\in$ ForS5 而言，如果存在一个从 ForS5 到 ForP 的能行函数 Tr，使得 $\alpha\in Th(S5)$ 当且仅当 $Tr(\alpha)\in Th(P)$ 即可。因为一个公式是 S5-定理，当且仅当存在该公式的 S5-证明，故只需要对 S5 的证明长度进行归纳，证明 S5-证明中的公式经过翻译嵌入映射 Tr_4 后得到的公式都是 P-定理即可。

证明：令 α 是 S5-证明中的任意公式。

因 $S5=KTE=P\oplus\Box(p\rightarrow q)\rightarrow(\Box p\rightarrow\Box q)\oplus\Box p\rightarrow p\oplus\Diamond p\rightarrow\Box\Diamond p$，故应该分以下几种情况讨论：

(1)如果 α 是 S5-公理，则 α 或是 P-公理，或是特征公理 K，或是特征公理 T，或是特征公理 E。当 α 是 P-公理时，根据翻译嵌入映射 Tr_4 的性质(1)知，Tr_4 把任意的 P-公理都映射成其自身，所以这时的 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

①当 α 是特征公理 K 时，$Tr_4(\alpha)=Tr_4(\Box(p\rightarrow q)\rightarrow(\Box p\rightarrow\Box q))=Tr_4(\Box(p\rightarrow q))\rightarrow Tr_4(\Box p\rightarrow\Box q)=Tr_4(p\rightarrow q)\rightarrow(Tr_4(\Box p)\rightarrow Tr_4(\Box q))=(Tr_4(p)\rightarrow Tr_4(q))\rightarrow(Tr_4(p)\rightarrow Tr_4(q))=(p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow q)$，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

②当 α 是特征公理 T 时，$Tr_4(\alpha)=Tr_4(\Box p\rightarrow p)=Tr_4(\Box p)\rightarrow Tr_4(p)=Tr_4(p)\rightarrow p=p\rightarrow p$，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

③当 α 是特征公理 E 时，$Tr_4(\alpha)=Tr_4(\Diamond p\rightarrow\Box\Diamond p)=Tr_4(\Diamond p)\rightarrow Tr_4(\Box\Diamond p)=Tr_4(\Diamond p)\rightarrow Tr_4(\Diamond p)=Tr_4(\neg\Box\neg p)\rightarrow Tr_4(\neg\Box\neg p)=\neg Tr_4(\Box\neg p)\rightarrow\neg Tr_4(\Box\neg p)=\neg Tr_4(\neg p)\rightarrow\neg Tr_4(\neg p)=\neg\neg Tr_4(p)\rightarrow\neg\neg Tr_4(p)=\neg\neg p\rightarrow\neg\neg p=p\rightarrow p$，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

(2)如果 α 是由 β 经过代换规则得到的 S5-公式，则 $Tr_4(\alpha)=Tr_4(\beta(p/\gamma))=Tr_4(\beta)(p/Tr_4(\gamma))$，由归纳假设知，$Tr_4(\beta)$ 是 P-定理，$Tr_4(\gamma)\in$ ForP，所以 $Tr_4(\beta)(p/Tr_4(\gamma))$ 是 P-定理，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

(3)如果 α 是由 $\beta\rightarrow\alpha$ 和 β 经过分离规则得到的 S5-公式，由归纳假设知，则 $Tr_4(\beta\rightarrow\alpha)$ 和 $Tr_4(\beta)$ 都是 P-定理，而 $Tr_4(\beta\rightarrow\alpha)=Tr_4(\beta)\rightarrow Tr_4(\alpha)$，由分离规则知，$Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

(4)如果 α 是由 β 经过必然化规则得到的 S5-公式，即 $\alpha=\Box\beta$，则 $Tr_4(\alpha)=Tr_4(\Box\beta)==Tr_4(\beta)$，归纳假设知，$Tr_4(\beta)$ 是 P-定理，此时 $Tr_4(\alpha)$ 也是 P-定理。证毕。

前面已经说明 S5、S5 的所有子系统 K、D、T、S4 和 B，以及系统 KDc 与 KTc 都不可坍塌嵌入系统 P，但是这些系统可以翻译嵌入 P。为此，笔者提出并证明下面的定理 6：

定理 6　定义 4 的翻译映射 Tr_4 可以使得 S5 的所有子系统 K、D、T、S4 和 B，以及系统 KDc 与 KTc 都能够翻译嵌入系统 P 中。

证明：定理 6 的证明与定理 5 的证明类似。这里只需要在定理 5 的证明基础上再分别证明当 α 是特征公理 D、4、Dc、Tc 时的情况即可。

①当 α 是特征公理 D 时，$Tr_4(\alpha)=Tr_4(\Box p\rightarrow\Diamond p)=Tr_4(\Box p)\rightarrow Tr_4(\Diamond p)=Tr_4(p)\rightarrow Tr_4(\neg\Box\neg p)=p\rightarrow\neg Tr_4(\Box\neg p)=p\rightarrow\neg Tr_4(\neg p)=p\rightarrow\neg\neg Tr_4(p)=p\rightarrow\neg\neg p=p\rightarrow p$，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

②当 α 是特征公理 4 时，$Tr_4(\alpha)=Tr_4(\Box p\rightarrow\Box\Box p)=Tr_4(\Box p)\rightarrow Tr_4(\Box\Box p)=Tr_4(p)\rightarrow Tr_4(\Box p)=p\rightarrow Tr_4(p)=p\rightarrow p$，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

③当 α 是特征公理 Dc 时，$Tr_4(\alpha)=Tr_4(\Diamond p\rightarrow\Box p)=Tr_4(\Diamond p)\rightarrow Tr_4(\Box p)=Tr_4(\neg\Box\neg p)\rightarrow Tr_4(p)=\neg Tr_4(\Box\neg p)\rightarrow p=\neg Tr_4(\neg p)\rightarrow p=\neg\neg Tr_4(p)\rightarrow p=\neg\neg p\rightarrow p=p\rightarrow p$，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。

④当 α 是特征公理 Tc 时，$Tr_4(\alpha)=Tr_4(p\rightarrow\Box p)=Tr_4(p)\rightarrow Tr_4(\Box p)=p\rightarrow Tr_4(p)=p\rightarrow p$，故，此时 $Tr_4(\alpha)$ 是 P-定理。证毕。

笔者认为，由定理 5 和定理 6 可以得出这样的结论：令 S_1 是一个逻辑系统，S_2 是 S_1 的真扩张系统，如果 S_2 不可坍塌嵌入 S_1 中，但是 S_2 可翻译嵌入 S_1 中；"S_2 可坍塌嵌入 S_1 中"可以看做是"S_2 可翻译嵌

入 S_1 中”的一种极端情况，即当对 S_2 的扩张超过一定的限度时引起了系统的坍塌时的情况。一般情况下，S_2 可翻译嵌入 S_1，但是 S_2 不可坍塌嵌入 S_1 中。例如：经典命题逻辑系统 P 可翻译嵌入 Int，但是 P 不可坍塌嵌入 Int。

在笔者看来，虽然翻译嵌入是双向的，但是我们总是通过对一个系统添加特征公理来得到其真扩张系统，所以研究把真扩张系统翻译嵌入原来的被扩张系统这一方向（即从“大”向“小”的方向）的嵌入显得尤为重要，这样，我们根据翻译嵌入可以保持各种逻辑性质，以及原被扩张系统的逻辑性质来推知该真扩张系统的逻辑性质。

例如，S5 可翻译嵌入 P 中，而 P 具有经典一致性[3]，所以 S5 也具有经典一致性。对此有一简单的证明：对于任意 $\alpha \in \mathrm{ForS5}$，只需证明如果 $\vdash_{s5}\alpha$，则 $\nvdash_{s5}\neg\alpha$ 即可。现在假设 $\vdash_{s5}\alpha$，即 $\alpha \in \mathrm{Th(S5)}$，由定理 5 知，$\mathrm{Tr}_4(\alpha)$ 是 P-定理，即 $\vdash_P \mathrm{Tr}_4(\alpha)$。又因为 P 具有经典一致性，所以 $\nvdash_P \neg \mathrm{Tr}_4(\alpha)$，再由定理 5 知，$\nvdash_{s5}\neg\alpha$，即 $\neg\alpha \notin \mathrm{Th(S5)}$，故 S5 也具有经典一致性。

在此基础上，因为系统 P 是由有限多个公理模式与有限的规则一起公理化而得到的，而且 P 具有经典一致性，所以 P 具有可判定性。而系统 S5 也是由有限多个公理模式与有限的规则一起公理化而得到的，又因为 S5 具有经典一致性，故可得到 S5 具有有限模型的性质。根据模态逻辑系统可判定性的定义[4]知，S5 也具有可判定性。

从以上的论述可以看出，坍塌嵌入得到的是与原被扩张的系统一模一样的等价的系统，在逻辑研究中，实用价值不大。坍塌嵌入只是翻译嵌入的一种极限情况，是翻译嵌入的一种特殊形式。逻辑中研究的嵌入，绝大多数都是翻译嵌入。而翻译嵌入则是研究真扩张系统与原被扩张系统之间的关系的重要桥梁和纽带，也是研究一个系统的真扩张系统的逻辑性质的捷径，值得我们花大力气去研究。

从笔者现有的资料来看，不少业内人士把一个逻辑系统到另一个逻辑系统之间的翻译或翻译映射就看做是笔者认为的翻译嵌入。例如，前面的定理 3 的原文是“The Gödel translation T is an embedding of Int into both S4 and Grz.”[2]97，A. Chagrov 他们认为，这里的“translation”就是“embedding”。而 B. R. Boričič通过对 Gödel 翻译进行改版后，发现“the minimal superintuitionistic predicate logics in which the classical logic can be embedded by these translations（经典逻辑通过这些翻译可以嵌入到最小的超直觉主义的谓词逻辑中）”[5]，由此可见，通过寻找能行的翻译函数或翻译映射可以达到翻译嵌入的目的。再举个例子：G. Antoniu 等人给出了从一个可废止理论 D 到一个元-程序 P(D)的翻译，从而把可废止逻辑嵌入到逻辑程序设计中，这样就为可废止逻辑与主流非单调推理方法之间建立起了联系，并说明在确定性的条件下，D 的可废止结果正好与稳定模型语义学下的 P(D)受怀疑的结论相对应；若没有确定性的条件，则需要求助于一个特殊的三值逻辑程序语义学，即 Kunnen 语义学来实现其完全嵌入[6]。

参考文献：

［1］ 周北海．模态逻辑[M]．北京：中国社会科学出版社，1996．

［2］ A. Chagrov, and M. Zakharyaschev. Modal Logic[M]. Clarendon Press, Oxford, 1997.

［3］ 宋文淦．符号逻辑基础[M]．北京：北京师范大学出版社，1993．

［4］ B. F. Chellas. Modal Logic[M]. Cambridge University Press, 1980: 41-63.

［5］ B. R. Boričič. Some Modifications of the Gödel Translation of Classical Intuitionistic Logic[J]. Bulletin of the Section of Logic, Volume 19/3(1990), 2005(reedition), 84-86.

［6］ G. Antoniu et al. Embedding Defeasible Logic into Logic Programming[J]. To appear in Theory Practice of Logic Programming (TPLP), 2005: 1-33.

责任编辑　刘荣军